

# **Una Formulación Arbitrariamente Lagrangiana Euleriana para Grandes Desplazamientos del Contorno**

A. Huerta

# **Una Formulación Arbitrariamente Lagrangiana Euleriana para Grandes Desplazamientos del Contorno**

A. Huerta

**Publicación CIMNE N°-1, 1988**



# INDICE

	<i><u>pag.</u></i>
<b>Resumen</b>	1
<b>Summary</b>	1
<b>1.- Introducción</b>	2
<b>2.- Bases Teóricas para una Descripción Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana</b>	4
2.1.- Definiciones y notación	4
2.2.- Actualización Referencial versus Lagrangiana	6
2.3.- Teorema del transporte de Reynolds en forma Referencial	7
<b>3.- Formulación de las Ecuaciones Fundamentales</b>	8
3.1.- Ecuaciones de equilibrio y continuidad por el método ALE	8
3.2.- Descripción del material	10
<b>4.- Remallado Automático</b>	12
4.1.- Introducción	12
4.2.- Movimiento de la malla prescrito a priori	12
4.3.- Método de la matriz de Euler-Lagrange	13
4.4.- Formulación mixta	15
<b>5.- Formulación Petrov-Galerkin de la Forma Débil</b>	17
<b>6.- Ecuaciones Matriciales y Algoritmo</b>	20
<b>7.- Ejemplos</b>	21
7.1.- Introducción	21
7.2.- Interacción fluido viscoso - sólido rígido	22
7.3.- Propagación de olas largas—Tsunamis	33
7.4.- Avenida creada por la rotura de una presa	38
Flujo sobre fluido en reposo	41
Flujo sobre fondo seco	48
7.5.- Chapoteo de gran amplitud	55
<b>8.- Conclusiones</b>	60
<b>Agradecimientos</b>	60
<b>Referencias</b>	60



<b>Apendice A: conservacion de masa y momentum en forma referencial</b>	65
A.1 Conservación de masa (ecuación de continuidad)	65
A.2 Conservación de momentum (ecuación de equilibrio)	67
<b>Apendice B: definición de matrices y vectores</b>	70
<b>Apendice C: método de la matriz de Euler–Lagrange según una formulación de galerkin</b>	73

# UNA FORMULACION ARBITRARIAMENTE LAGRANGIANA-EULERIANA PARA GRANDES DESPLAZAMIENTOS DEL CONTORNO

## RESUMEN

*En este estudio se desarrolla una técnica de elementos finitos basada en una formulación de Petrov-Galerkin y una descripción Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana (ALE) para el análisis de fluidos viscosos no lineales con grandes movimientos del contorno. Se pasa revista a las ecuaciones fundamentales y a las ecuaciones cinemáticas contempladas desde una referencia arbitraria. Puesto que los algoritmos de remallado son el principal reto de la descripción ALE, se desarrollan varios métodos, incluyendo una nueva formulación mixta, para actualizar la malla de una manera racional. Además, se ha implementado, en las ecuaciones de remallado, la formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente, dado que permite analizar con exactitud flujos cuyos movimientos de la superficie libre son altamente convectivos. Se demuestra la eficacia del método en un estudio de interacción fluido estructura, tsunamis, el problema de la rotura de una presa —donde se alcanzan números de Reynolds tan elevados como 3000— y un análisis de chapoteo de gran amplitud.*

## SUMMARY

*An Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Petrov-Galerkin finite element technique is developed to study nonlinear viscous fluids under large boundary motion. A review of the kinematics and field equations from an arbitrary reference is presented and since the major challenge of the ALE description lies in the mesh rezoning algorithm, various methods, including a new mixed formulation, are developed to update the mesh and map the moving domain in a more rational manner. Moreover, the streamline upwind Petrov-Galerkin formulation is implemented to accurately describe highly convective free surface flows. The effectiveness of the algorithm is demonstrated on a viscous fluid-structure interaction analysis, a tsunami problem, the dam-break problem where the Reynolds number is taken as high as 3000, and a large amplitude sloshing problem.*

## 1.— INTRODUCCIÓN

A pesar de que el método de los elementos finitos es una de las técnicas numéricas más poderosas y sofisticadas que se posee en la actualidad para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, la mayor parte de su desarrollo inicial se aplicó únicamente al análisis de estructuras y no fue hasta finales de los años sesenta que estas técnicas se utilizaron para resolver problemas de flujo definidos por un potencial. Actualmente la mayor parte de la investigación en elementos finitos se centra, entre otros, en flujos viscosos, procesos de transporte, interacción fluido-estructura, flujo compresible no viscoso y flujos de superficie libre. En todo caso, la aplicación del MEF a flujos viscosos con superficie libre —como coladas de rocas, avalanchas de nieve, rotura de una presa o muros de retención de residuos industriales y flujos de polímeros (ej. extrusión, recubrimiento superficial, moldadura por inyección, etc.)— es todavía muy rudimentaria. Este trabajo se centra en el desarrollo de técnicas Arbitrariamente Lagrangianas-Eulerianas (ALE) para flujos viscosos con superficie libre.

La descripción cinemática (i.e. la relación entre el fluido en movimiento y la malla de elementos) es extremadamente importante en dinámica de fluidos multidimensional. En la mecánica de los medios continuos se emplean dos descripciones clásicas. La primera es la Lagrangiana donde los nodos de la malla coinciden a lo largo del tiempo con las partículas materiales. En esta descripción no aparecen términos convectivos lo que simplifica considerablemente los cálculos numéricos; además, se pueden estudiar con gran exactitud los contornos o interfases en movimiento. Pero la descripción Lagrangiana no trata satisfactoriamente las distorsiones del continuo, produciéndose penetraciones y desapariciones de los elementos. En cambio la segunda descripción, la Euleriana, permite enormes distorsiones sin problemas puesto que la malla permanece fija con respecto al laboratorio y el continuo se mueve a través de ella. Pero este último método presenta dos inconvenientes importantes: (i) los términos convectivos, que introducen dificultades numéricas, aparecen debido al movimiento relativo entre la malla y las partículas; y (ii) los contornos e interfases en movimiento relativo no pueden ser descritos con exactitud sin un excesivo costo computacional o sin introducir sofisticadas hipótesis para las condiciones de contorno.

Debido a las limitaciones de las descripciones puramente Lagrangianas o Eulerianas, se han desarrollado las técnicas ALE, primero en diferencias finitas por Noh (1964) y Hirt et al. (1974), entre otros, y posteriormente en elementos finitos por Donea et al. (1977), Belytschko y Kennedy (1978), Hughes et al. (1981), y Donea (1983). Este nuevo método se basa en definir de forma arbitraria el movimiento del sistema de referencia. De esta forma la malla de elementos finitos se puede adecuar al movimiento continuo, describir con exactitud el movimiento de las interfases o contornos,



y mantener elementos con formas regulares. Las ecuaciones fundamentales en el ALE siguen presentando términos convectivos, pero la posibilidad de movimiento de la malla permite, en ciertos casos, reducir su influencia relativa.

Es evidente que algunas veces es difícil reducir las velocidades convectivas y al mismo tiempo optimizar el remallado del continuo. En estos casos, el remallado tiene prioridad y hay que implementar técnicas numéricas para suprimir las oscilaciones espúreas que aparecen con números de Peclet moderados o altos. Una forma de controlar estas oscilaciones, debidas al carácter no autoadjunto de las ecuaciones, es refinar considerablemente la malla, pero es evidente que el costo es muy importante y por lo tanto las ventajas del MEF frente a otros métodos quedan reducidas. Richtmyer y Morton (1967) introdujeron en las técnicas de diferencias finitas la idea de ponderar a contracorriente las derivadas del término convectivo. En elementos finitos las primeras referencias corresponden a Heinrich et al. (1977), Hughes (1978), Belytschko y Kennedy (1978), y Heinrich y Zienkiewicz (1979), entre otros. Ultimamente, Donea (1984) y Löhner et al. (1984) recomiendan formulaciones de Taylor-Galerkin para procesos altamente convectivos, mientras que Brooks y Hughes (1982), Hughes y Tezduyar (1984), y Hughes y Mallet (1986) prefieren una formulación de Petrov-Galerkin. Aquí se implementan las técnicas de Petrov-Galerkin por la extrema dificultad que supone utilizar Taylor-Galerkin con ecuaciones no autoadjuntas de difusión no lineal como pueden ser las de Navier-Stokes para fluidos no Newtonianos. Es importante observar que las ecuaciones que gobiernan el remallado son puramente convectivas, por lo tanto, también se emplea una formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente en su desarrollo.

La organización de la presente monografía es la siguiente: primero se introduce la notación y la cinemática empleada en el ALE para derivar las ecuaciones fundamentales; seguidamente se presentan estas ecuaciones (continuidad y equilibrio) en forma referencial y se formulan las ecuaciones de actualización de la malla. Una vez se han definido las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del fluido, se formulan las ecuaciones integrales asociadas, lo que conduce, después de la discretización correspondiente, a sistemas de ecuaciones que se resuelven por algoritmos predictores-correctores. Finalmente, se estudian tres problemas para demostrar la eficacia de la metodología propuesta.

## 2.- BASES TEÓRICAS PARA UNA DESCRIPCIÓN ARBITRARIAMENTE LAGRANGIANA-EULERIANA

### 2.1.- Definiciones y notación

Las dos formulaciones clásicas para describir el movimiento de un continuo son: la Lagrangiana y la Euleriana. En la primera, el sistema de referencia se mueve solidario con las partículas materiales siendo  $R_X$  y  $\mathbf{X}$  el dominio y las coordenadas de un punto material, respectivamente; en la segunda, se utiliza un sistema de referencia fijo en el laboratorio donde el continuo y sus puntos se simbolizan por  $R_x$  y  $\mathbf{x}$ , respectivamente. En la descripción ALE, el continuo se "observa" desde una referencia arbitraria que puede, por lo tanto, tener una velocidad relativa con respecto al laboratorio, y al mismo tiempo ser absolutamente independiente del movimiento de las partículas. En esta referencia el continuo se denota por  $R_\chi$  y las coordenadas de un punto por  $\chi$ . La Figura 1 es un esquema de los dominios citados con las biyecciones  $\Phi$  y  $\Psi$  que relacionan  $R_\chi$  con  $R_x$  y con  $R_X$ , respectivamente. De hecho,  $\Phi$  y  $\Psi$  pueden representarse simbólicamente por:

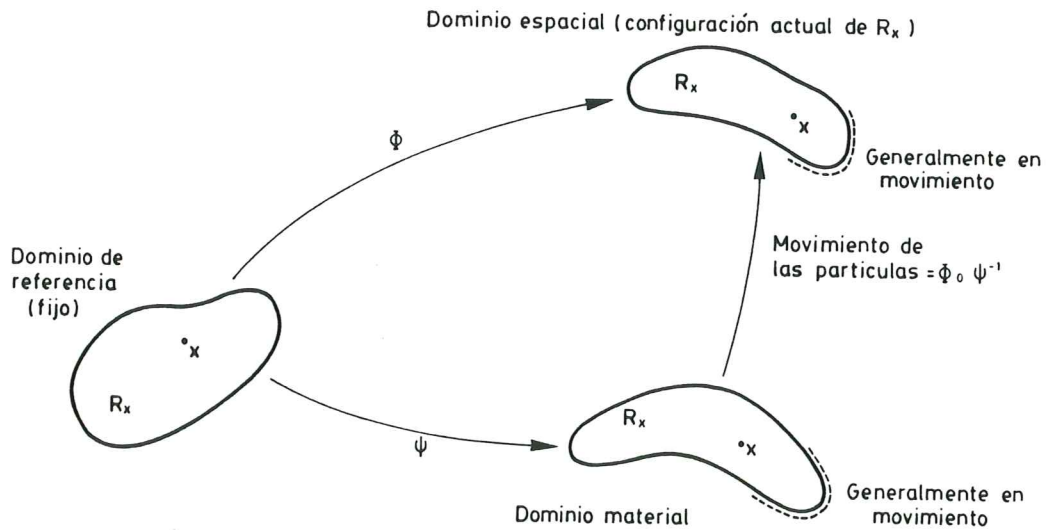


FIGURA 1. Diagrama esquemático de los dominios y transformaciones en una descripción Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana

$$\Phi \begin{cases} R_\chi \times [0, \infty[ & \longrightarrow R_x \\ (\chi, t) & \longmapsto \Phi(\chi, t) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Psi \begin{cases} R_\chi \times [0, \infty[ & \longrightarrow R_X \\ (\chi, t) & \longmapsto \Psi(\chi, t) = \mathbf{X} \end{cases} \quad (2)$$

donde  $t$  denota tiempo. Es importante observar que la descripción ALE equivale a una formulación Euleriana si  $\Phi$  es la función identidad en cualquier instante. Así mismo, si  $\Psi$  es la identidad, se obtiene una formulación Lagrangiana.

Puesto que el único dominio fijo en esta formulación es el referencial, i.e.  $R_{\chi}$ , conviene expresar las derivadas materiales de forma referencial. Sea  $f(\mathbf{x}, t)$  una propiedad física definida en el laboratorio. Utilizando las funciones descritas en Ecs. (1) y (2) se puede escribir

$$f(\mathbf{x}, t) = f^*(\chi, t) = f^{**}(\mathbf{X}, t) \quad (3)$$

donde  $*$  y  $**$  denotan "con respecto a  $\chi$  y  $\mathbf{X}$ ", respectivamente, y por composición de funciones ( $\circ$ ) se definen  $f^*$  y  $f^{**}$  como

$$f^* = f \circ \Phi \quad y \quad f^{**} = f \circ \Phi \circ \Psi^{-1} \quad (4)$$

Derivando esta propiedad física con respecto a  $t$ , manteniendo  $\mathbf{X}$  fijo (i.e. derivada material de  $f^{**}$ ) y aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$\left. \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_{\chi} + w_i \frac{\partial f^*}{\partial \chi_i}(\chi, t) \quad (5)$$

con

$$w_i = \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad (6)$$

siendo  $\mathbf{w}$  la velocidad de las partículas desde la referencia y donde  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\xi}$  significa derivada parcial con respecto al tiempo manteniendo  $\xi$  fijo. En el caso de que la propiedad física sean las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  de un punto, las Ecs. (3) y (5) se transforman en

$$x_i = x_i^*(\chi, t) = x_i^{**}(\mathbf{X}, t) \quad (7)$$

y

$$\left. \frac{\partial x_i^{**}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_{\chi} + w_j \frac{\partial x_i^*}{\partial \chi_j}(\chi, t) \quad (8)$$

A partir de esta ecuación se puede definir la velocidad material de una partícula  $\mathbf{v}$  y la velocidad de la malla  $\hat{\mathbf{v}}$  como

$$v_i = \left. \frac{\partial x_i^{**}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}} \quad (9a)$$

y

$$\hat{v}_i = \left. \frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_{\chi} \quad , \quad (9b)$$



respectivamente. Por lo tanto la Ec. (8) se puede escribir como

$$v_i = \hat{v}_i + w_j \frac{\partial x_i^*}{\partial \chi_j} \quad , \quad (10)$$

o bien

$$c_i = v_i - \hat{v}_i \quad , \quad (11)$$

donde

$$c_i = w_j \frac{\partial x_i^*}{\partial \chi_j} \quad , \quad (12)$$

es la velocidad convectiva. Las Ecs. (10), (11) y (12) fueron desarrolladas originalmente por Hughes et al. (1981) y forman la base de los métodos automáticos de remallado que se presentan a continuación.

Antes de proseguir con las definiciones, es importante observar que  $\mathbf{w}$  (i.e. la velocidad de las partículas con respecto a la referencia) es idénticamente igual a  $\mathbf{v}$  (i.e. velocidad material de las partículas) en una descripción Euleriana puesto que, la referencia y el laboratorio coinciden. Además, en este caso la velocidad de la malla es nula ( $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$ ) y por lo tanto, la velocidad convectiva,  $\mathbf{c}$ , es igual a la material  $\mathbf{v}$ . Por otro lado, si  $\mathbf{w}$  es idénticamente nula es porque no existe movimiento relativo entre las partículas y la malla (i.e. referencia), es decir que  $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{c}$  es nula y la formulación es Lagrangiana.

Finalmente, substituyendo la Ec. (12) en la Ec. (5) y aplicando la regla de la cadena, se obtiene una relación entre la derivada temporal material, la temporal referencial y la espacial

$$\left. \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_{\chi} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (13)$$

## 2.2.— Actualización Referencial versus Lagrangiana

En una descripción Lagrangiana la actualización de cualquier propiedad física es sencilla y se realiza siempre siguiendo el movimiento de la partícula material. Haciendo un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de la propiedad  $f$  con respecto al tiempo, se obtiene

$$f^{**}(\mathbf{X}, t + dt) = f^{**}(\mathbf{X}, t) + dt \left. \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}} + \dots \quad (14)$$

Si se realiza el mismo desarrollo en el caso referencial, se obtiene la siguiente ecuación:

$$f^*(\chi, t + dt) = f^*(\chi, t) + dt \left. \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_{\chi} + \dots \quad (15)$$

que también puede escribirse haciendo uso de la transformación  $\Psi$ , para referirse a las partículas materiales, como

$$\begin{aligned} f^*[\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t + dt), t + dt] &= f^*[\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t] \\ &+ dt \frac{\partial f^*}{\partial t}[\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t] \Big|_{\chi=\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t)} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

o bien,

$$f^{**}(\bar{\mathbf{X}}, t + dt) = f^{**}(\mathbf{X}, t) + dt \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\chi=\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t)} + \dots \quad (17a)$$

donde

$$\bar{\mathbf{X}} = \Psi(\chi, t + dt) \quad y \quad \mathbf{X} = \Psi(\chi, t) \quad . \quad (17b)$$

Si se comparan las Ecs. (17a) y (14), se puede observar que ambas tienen términos similares a la derecha de la igualdad, pero a la izquierda de la igualdad, la función  $f^{**}$  está referida a partículas distintas.  $\mathbf{X}$  y  $\bar{\mathbf{X}}$  son dos partículas materiales diferentes que en los instantes  $t$  y  $t + dt$ , respectivamente, ocupan la misma coordenada referencial. Por lo tanto, en una formulación referencial, actualizaciones sencillas del tipo de la Ec. (15) no pueden utilizarse para materiales cuyas propiedades vayan asociadas a cada partícula y trayectoria (materiales con memoria), puesto que para cada incremento de tiempo se está cambiando de partícula como puede observarse en (17). En cambio para materiales homogéneos sin memoria, como por ejemplo Fluidos Newtonianos Generalizados, la Ec. (15) puede implementarse directamente, puesto que las propiedades materiales sólo dependen, en cada instante, del campo de velocidades existente y no de la partícula material asociada. Ejemplos de técnicas ALE aplicadas a materiales con memoria se pueden encontrar en Liu et al. (1986), (1987a) y (1987b).

### 2.3.— Teorema del transporte de Reynolds en forma Referencial

Para poder establecer en ALE las ecuaciones integrales de las leyes de conservación, la derivada material de una propiedad escalar  $G(t)$ , debe ser estudiada. Sea  $G$  una función definida por la integral de volumen

$$G(t) = \int_{V_\chi} f^*(\chi, t) d\Omega \quad (18)$$

con el volumen de control  $V_\chi$  incluido en el dominio  $R_\chi$ . Haciendo uso el teorema de la divergencia se puede demostrar (Donea, 1983) que la derivada material de la Ec. (18) es

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t) \Big|_{\mathbf{X}} = \int_{V_\chi} \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \Big|_{\chi} d\Omega + \oint_{\partial V_\chi} w_i \hat{n}_i f^* dS \quad (19)$$



donde  $\mathbf{w}$  es la velocidad de las partículas vista desde la referencia, Ec. (6), y  $\hat{\mathbf{n}}$  es la normal exterior al contorno de  $V_\chi$  (i.e.  $\partial V_\chi$ ). La ecuación anterior establece que la velocidad de variación de  $G(t)$  es igual a la cantidad instantáneamente creada en  $V_\chi$  más el flujo a través del  $\partial V_\chi$  debido al movimiento relativo de la referencia. La particularización de la Ec. (19) a los casos Lagrangiano y Euleriano se realiza automáticamente substituyendo  $\mathbf{w}$  por  $\mathbf{0}$  o por  $\mathbf{v}$ , respectivamente.

### 3.- FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES

#### 3.1.- Ecuaciones de equilibrio y continuidad por el método ALE

Para simplificar la formulación, la notación \* y \*\* que diferenciaba los tres dominios:  $R_x$ ,  $R_X$  y  $R_\chi$ , se abandona. El Apéndice A presenta la derivación de las ecuaciones de continuidad y equilibrio para las diferentes formulaciones haciendo uso de la Ec. (19), estas ecuaciones en forma referencial se escriben:

$$\left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_{\chi} + \frac{\partial \hat{\rho} w_i}{\partial \chi_i} = 0 \quad \text{en } R_\chi \quad (20a)$$

$$\left. \hat{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{\chi} + \hat{\rho} w_j \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial \chi_j} + \hat{\rho} g_i \quad \text{en } R_\chi \quad (20b)$$

donde

$$\hat{J} = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} \right] \quad (20c)$$

$$\hat{\rho}(\chi, t) = \hat{J} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (20d)$$

$$\hat{T}_{ij} = \hat{J} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} \quad (20e)$$

$\rho$  es la densidad del material,  $\mathbf{g}$  la aceleración de la gravedad, y  $\sigma$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  son los tensores de tensiones de Cauchy y primero de Piola-Kirchhoff, respectivamente.

Las ecuaciones (20) no suelen ser utilizadas con el método de los elementos finitos porque el término del tensor de tensiones en la Ec. (20b) presenta dificultades muy similares a las existentes en una formulación Lagrangiana (i.e. tensor de tensiones no simétrico o bien aumento del costo numérico por el uso del segundo tensor de Piola-Kirchhoff, y además, las ecuaciones constitutivas se escriben normalmente en función del tensor de tensiones de Cauchy). Por lo tanto, se sugiere una formulación diferente (Hughes et al., 1981).

Si se opta por una formulación de las ecuaciones fundamentales en  $R_x$  para simplificar el tratamiento del término de tensiones, se necesita, en cada instante, una transformación de  $R_\chi$  en  $R_x$  puesto que todas las incógnitas están en función de las coordenadas referenciales. Para simplificar esta transformación, las derivadas temporales se dejan en forma referencial (i.e. derivadas con respecto al tiempo manteniendo  $\chi$  fijo). Substituyendo la Ec. (13) en la forma Euleriana de las ecuaciones de continuidad y equilibrio se obtiene (ver Apéndice A)

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_\chi + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } R_x \quad (21a)$$

$$\rho \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_\chi + \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \hat{\rho} g_i \quad \text{en } R_x \quad (21b)$$

El origen de las Ecs. (21) y su similitud con la forma Euleriana de las ecuaciones fundamentales ha inducido a algunos autores (Belytschko et al., 1980) a denominar la presente formulación como "Quasi-Euleriana".

Las Ecs. (21) presentan un término convectivo; por lo tanto, una de las dificultades de las técnicas Eulerianas también está presente en el método ALE. Pero la posibilidad de escoger arbitrariamente la velocidad de la malla de elementos,  $\hat{\mathbf{v}}$ , permite reducir, en algunos casos, la velocidad convectiva de forma que los problemas numéricos asociados con las ecuaciones de transporte quedan soslayados.

De una forma paralela, las condiciones de contorno, necesarias para la resolución del problema, se plantean con mayor facilidad en  $R_x$  que en el dominio referencial. Por lo tanto se impone

$$v_i = b_i \quad \text{sobre } \partial R_x^b \quad (22a)$$

$$\sigma_{ij} = h_i \quad \text{sobre } \partial R_x^h \quad (22b)$$

donde  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{h}$  son, respectivamente, las velocidades y tensiones prescritas en el contorno;  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a  $\partial R_x$ , siendo  $\partial R_x$  el contorno (seccionalmente continuo) de  $R_x$ . Se supone que  $\partial R_x$  admite la siguiente descomposición

$$\partial R_x = \overline{\partial R_x^b \cup \partial R_x^h} \quad (23a)$$

$$\emptyset = \partial R_x^b \cap \partial R_x^h \quad (23b)$$

con  $\partial R_x^b$  y  $\partial R_x^h$  subconjuntos de  $\partial R_x$ . La barra que aparece en la Ec. (23a) representa la clausura del dominio y  $\emptyset$  es el conjunto vacío.

### 3.2.— Descripción del material

El problema de contorno no queda completamente definido mientras no se especifique la ecuación constitutiva del material (i.e. una relación entre el tensor de tensiones y/o sus derivadas y el vector de desplazamientos y/o sus derivadas). La formulación que aquí se presenta es aplicable a cualquier tipo de material siempre que la actualización de las diferentes funciones se haga adecuadamente. Recuérdese que en el método ALE dicha actualización no es trivial. A continuación se presentan las ecuaciones para fluidos no Newtonianos, la formulación para la mecánica de sólidos no lineales puede encontrarse en Liu et al. (1986), (1987a) y (1987b).

En la Tabla 1 se presentan algunos de los modelos no-Newtonianos más usuales (ver Bird et al., 1977). En general el tensor de tensiones queda definido por

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\dot{\gamma}_{ij} \quad (24a)$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad y \quad \mu = \mu(\dot{\gamma}_{ij}) \quad (24b)$$

siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica función de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$ ,  $P$  la presión termodinámica y  $\delta_{ij}$  la delta de Kroneker. El método que se presenta es independiente del modelo de Fluido Newtoniano Generalizado escogido. Es obvio que estos materiales no poseen memoria; por lo tanto, en cualquier instante y punto, el tensor de tensiones sólo depende del campo de velocidades espacial y obviamente, su actualización es sencilla.

Es importante observar que si el proceso de flujo viscoso se supone isotermo y barotrópico (i.e.  $F(P, \rho) = 0$ ) y si  $\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{B}{\rho}$ , siendo  $B$  el módulo volumétrico del fluido; la ecuación de continuidad, Ec. (21a), puede escribirse (Liu y Ma, 1982)

$$\frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } R_x \quad (25)$$

o bien substituyendo la Ec. (12) en la anterior

$$\frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{B} c_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } R_x. \quad (26)$$

Modelo	1-D Viscosidad	3-D Generalización
Newtoniano	$\mu_0 = \text{constante}$	$\sigma' = 2 \mu_0 \mathbf{D}'$
Ley de Potencias	$\mu = m \dot{\gamma}^{n-1}$	$\sigma' = 2m(\sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)})^{n-1} \mathbf{D}'$
Ley de Potencias	$\mu = \mu_0 \quad \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$	$\sigma' = 2\mu_0 \mathbf{D}' \quad \sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)} \leq \dot{\gamma}_0$
Truncada	$\mu = \mu_0(\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0)^{n-1} \quad \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$	$\sigma' = 2\mu_0(\sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)}/\dot{\gamma}_0)^{n-1} \mathbf{D}' \quad \sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)} \leq \dot{\gamma}_0$
Carreau	$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2}$	$\sigma' = 2(\mu_0 - \mu_\infty)[1 + 2\lambda^2 tr(\mathbf{D}'^2)]^{(n-1)/2} \mathbf{D}' + 2\mu_\infty \mathbf{D}'$
Carreau-A	$\mu_\infty = 0$	$\sigma' = 2\mu_0[1 + 2\lambda^2 tr(\mathbf{D}'^2)]^{(n-1)/2} \mathbf{D}'$
Bingham	$\mu = \infty \quad \tau \leq \tau_0$ $\mu = \mu_p + \tau_0/\dot{\gamma} \quad \tau \geq \tau_0$	$\mathbf{D}' = 0 \quad 1/2tr(\sigma'^2) \leq \tau_0^2$ $\sigma' = 2\mu_p[1 + \tau_0/\sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)}] \mathbf{D}' \quad 1/2tr(\sigma'^2) \geq \tau_0^2$
Herschel y Bulkley	$\mu = \infty \quad \tau \leq \tau_0$ $\mu = m\dot{\gamma}^{n-1} + \tau_0/\dot{\gamma} \quad \tau \geq \tau_0$	$\mathbf{D}' = 0 \quad 1/2tr(\sigma'^2) \leq \tau_0^2$ $\sigma' = 2m(\sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)})^{(n-1)} \mathbf{D}' + 2\tau_0/\sqrt{2tr(\mathbf{D}'^2)} \mathbf{D}' \quad 1/2tr(\sigma'^2) \geq \tau_0^2$
donde $\sigma'$ y $\mathbf{D}'$ son las partes desviatorias de los tensores de tensión y de velocidad de deformación [ej. $1/2(\nabla v + v\nabla)$ ], respectivamente.		

TABLA I



## 4.- REMALLADO AUTOMÁTICO

### 4.1.- Introducción

La posibilidad de mover arbitrariamente la malla en una descripción ALE es sumamente interesante. Se consigue un seguimiento de las superficies materiales con la precisión característica de los métodos Lagrangianos y al mismo tiempo, se conserva la regularidad de la malla evitando la interpenetración de los elementos. Pero, esto requiere un algoritmo eficiente y general que actualice los desplazamientos ( $\hat{\mathbf{d}}$ ), las velocidades ( $\hat{\mathbf{v}}$ ) y las aceleraciones ( $\hat{\mathbf{a}}$ ) de la malla. Normalmente las técnicas de remallado se caracterizan por desarrollos heurísticos que sólo permiten su aplicación a los problemas particulares para los que fueron diseñadas, o bien, requieren la intervención periódica de un operador. Este último caso presenta dos problemas: (i) el encarecimiento de los costos de cálculo por la participación de un operador experimentado en el tipo de problema estudiado, y (ii) la introducción, normalmente, de excesiva difusión en el transporte de las variables. Aquí se presenta una metodología general e integradora que permite un remallado automático, solventando de esta forma gran parte de los inconvenientes mencionados.

El sistema de referencia se toma fijo, pero tiene un movimiento relativo con respecto al laboratorio o con respecto al continuo que es arbitrario; es decir, la velocidad de las partículas vistas desde la referencia,  $\mathbf{w}$ , y la velocidad de la malla con respecto al laboratorio,  $\hat{\mathbf{v}}$ , se escogen arbitrariamente. En todo caso, estas dos velocidades están interrelacionadas por la Ec. (10) y por lo tanto, en cuanto se fija una de ellas, la otra queda automáticamente definida. Es importante observar que si se prescribe  $\hat{\mathbf{v}}$ , entonces  $\hat{\mathbf{d}}$  y  $\hat{\mathbf{a}}$  están automáticamente definidos, y consecuentemente no es necesario evaluar  $\mathbf{w}$ . Por el contrario, si se desconoce  $\hat{\mathbf{v}}$  pero  $\mathbf{w}$  está dada, hay que resolver la Ec. (10) para evaluar  $\hat{\mathbf{v}}$  y a partir de ella actualizar la malla. En todo caso, se pueden prescribir velocidades referenciales mixtas (i.e.  $\hat{\mathbf{v}}$  dada en una o varias direcciones espaciales mientras que  $\mathbf{w}$  se prescribe en las restantes). Es obvio que uno de los problemas principales del método ALE es el encontrar la "mejor" elección para estas velocidades y un algoritmo eficiente para la actualización de la malla. Se pueden plantear tres casos distintos dependiendo de que velocidad se prescribe ( $\hat{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{w}$  o mixtas).

### 4.2.- Movimiento de la malla prescrito a priori

Se define  $\hat{\mathbf{v}}$  en los casos en que el movimiento del contorno se conoce de antemano a cada instante. Liu et al. (1986) utilizan una velocidad constante de la malla para reducir la convectividad en un problema de propagación de ondas de presión, mientras que Liu et al. (1987) implementaron una fórmula "ad hoc" para incrementar la densidad de elementos donde las funciones

incógnita varían rápidamente. Finalmente, el problema de interacción fluido viscoso estructura que se presenta más adelante, entra dentro de esta categoría puesto que el movimiento del contorno del fluido se conoce en cada instante.

#### 4.3.— Método de la matriz de Euler-Lagrange

El caso en que  $\mathbf{w}$  se fija arbitrariamente es una formalización del método propuesto por Hughes et al. (1981). Sea  $\mathbf{w}$

$$w_i = \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = (\delta_{ij} - \alpha_{ij})v_j, \quad (27)$$

siendo  $[\alpha_{ij}]$  la matriz de Euler-Lagrange que cumple:  $\alpha_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\alpha_{ii}$  es real (los índices subrayados indican que no se efectúa suma en ellos). En general las alphas varían en el espacio y con el tiempo, pero es usual definir las constantes con respecto al tiempo. Es decir, la matriz de parámetros de Euler-Lagrange se define una sola vez en cada punto. La Ec. (27) impone la condición de que  $\mathbf{w}$  es colineal con la velocidad material. Esta ecuación se definió de esta forma porque si  $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$  entonces  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , obteniéndose una descripción Lagrangiana, mientras que si  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  y por lo tanto se emplea una descripción Euleriana.

Es importante hacer notar que este método presenta ciertos problemas; por ejemplo, mientras  $\hat{\mathbf{v}}$  tiene una interpretación física clara (i.e. la velocidad de la malla),  $\mathbf{w}$  es mucho más difícil de visualizar (excepto cuando es perpendicular a superficies materiales que vale cero) y por lo tanto es bastante laborioso mantener elementos regulares en un dominio que sufra grandes deformaciones prescribiendo exclusivamente las alphas. Debido a este inconveniente, se introduce una formulación mixta que se presenta en el siguiente apartado.

Puesto que  $\mathbf{w}$  se define en la Ec. (27), las otras velocidades quedarán determinadas a partir de las Ecs. (12) y (10), que se transforman, respectivamente, en

$$c_i = \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} (\delta_{jk} - \alpha_{jk})v_k \quad (28)$$

y

$$\hat{v}_i = v_i - (\delta_{jk} - \alpha_{jk})v_k \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j}. \quad (29)$$

Estas ecuaciones deben verificarse en el dominio referencial y a lo largo de su contorno. Substituyendo las Ecs. (9) en (29) se obtiene la ecuación básica para remallado automático

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + (\delta_{jk} - \alpha_{jk})v_k \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} - v_i = 0 \quad (30)$$

La Ec. (30) sólo difiere en el último término de la propuesta por Hughes et al. (1981), aunque esta diferencia no exista si los parámetros de Euler-Lagrange se escogen iguales a uno o cero. La matriz jacobiana (i.e.  $\frac{\partial x_i}{\partial \chi_j}$ ), en cambio, no aparece en la formulación de Liu y Ma (1982). Es importante observar por último que la Ec. (30) modela un proceso de convección puro y por lo tanto presenta los problemas numéricos característicos de las ecuaciones no autoadjuntas.

La Ec. (30) y por lo tanto la técnica ALE basada en el método de los parámetros de Euler-Lagrange, es extremadamente útil en ciertos problemas como por ejemplo la propagación de ondas largas ("Tsunamis") y, en general, en cualquier problema de flujo con superficie libre donde esta superficie puede ser escrita como  $x_{3s} = x_{3s}(x_1, x_2, t)$  siendo  $x_1$  y  $x_2$  dos direcciones Eulerianas (i.e.  $x_1 = \chi_1$  y  $x_2 = \chi_2$ ). Es decir, la superficie libre se define como una coordenada espacial que es una función continua y diferenciable con respecto al tiempo y a las otras dos coordenadas espaciales que son fijas. En estos problemas la matriz de Euler-Lagrange sólo tiene un término no nulo,  $\alpha_{33}$  (normalmente igual a 1), y la única ecuación no trivial de la Ec. (30) es

$$\left. \frac{\partial x_{3s}}{\partial t} \right|_{\chi} + v_1 \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1} + v_2 \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2} - v_3 = (\alpha_{33} - 1) v_3 \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_3} \quad (31)$$

Se observa claramente que la ecuación anterior es la ecuación cinemática de una superficie, y por lo tanto puede escribirse como

$$\left. \frac{\partial x_{3s}}{\partial t} \right|_{\chi} + v_i n_i N_s = a(x_1, x_2, x_{3s}, t) \quad (32)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a la superficie que tiene por componentes:

$$\left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1}, \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2}, -1 \right) \quad , \quad (33a)$$

$N_s$  es su norma

$$\begin{aligned} N_s &= \sqrt{1 + \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial x_2} \right)^2} \quad , \end{aligned} \quad (33b)$$

y  $a(x_1, x_2, x_{3s}, t)$  es la "velocidad de acumulación" que expresa las ganancias o pérdidas de masa en el interior de la superficie (Hutter y Vulliet, 1985), deduciéndose automáticamente tras comparar las Ecs. (31) y (32)

$$a(x_1, x_2, x_{3s}, t) = (\alpha_{33} - 1) v_3 \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_3} = w_3 \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_3} \quad (34)$$



La superficie libre en problemas isotermos es material; por lo tanto la velocidad de acumulación debe ser nula y consecuentemente  $\alpha_{33}$  tiene que ser igual a uno a lo largo de esta superficie. Esta misma conclusión puede obtenerse si se observa que las partículas no pueden cruzar la superficie y por lo tanto  $w_3$  debe ser nulo. Aunque la Ec. (30) puede ser generalizada a problemas donde  $x_1$  y/o  $x_2$  sean no-Eulerianos prescribiendo alphas no nulos en estas direcciones, el control de la regularidad de los elementos es complicado a partir del ajuste de las alphas.

#### 4.4- Formulación mixta

Debido a las restricciones del método de las alphas, se propone una formulación mixta para la resolución de la Ec. (10). Uno de los objetivos de la metodología ALE es el describir numéricamente con exactitud los contornos en movimiento que son normalmente superficies materiales. Por lo tanto, a lo largo de estas superficies  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ , donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior. Otro objetivo del método ALE es el evitar la interpenetración de los elementos y esto se realiza mucho mejor si, una vez conocida la posición del contorno, se definen los desplazamientos o las velocidades de la malla (por ejemplo a través de ecuaciones potenciales), porque ambos  $\hat{\mathbf{d}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  gobiernan directamente la forma de los elementos. En conclusión, se debería de poder forzar  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$  a lo largo del contorno mientras se definen las  $\hat{\mathbf{d}}$ 's o las  $\hat{\mathbf{v}}$ 's en el interior.

El sistema de ecuaciones diferenciales definido en la Ec. (10) debe resolverse a lo largo del contorno en movimiento. Observarse que resolviendo primero para  $w_i$  en función de  $(v_i - \hat{v}_i)$ , la Ec. (10) puede reescribirse como

$$\hat{J}^{ji}(v_j - \hat{v}_j) = \hat{J}w_i \quad (35a)$$

o bien

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\chi} - v_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{NSD} \frac{v_j - \hat{v}_j}{\hat{J}^{ii}} \hat{J}^{ji} = -\frac{\hat{J}}{\hat{J}^{ii}} w_i \quad (35b)$$

donde  $\hat{J}$  es el jacobiano que ya se definió en la Ec. (20c) y  $\hat{J}^{ij}$  es el cofactor (i.e. determinante menor complementario con signo) del elemento  $\frac{\partial x_i}{\partial \chi_j}$  de la matriz jacobiana. Sin pérdida de generalidad y para poder simplificar la formulación de las ecuaciones, se supone que los contornos en movimiento son perpendiculares en el espacio de referencia a un eje coordenado. Sea  $\chi_3$  el eje perpendicular a la superficie libre, las dos primeras ecuaciones de (35) son triviales porque en las direcciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$  la velocidad de la malla está prescrita y por lo tanto el movimiento de la malla es conocido, pero en la tercera dirección se debe, dados  $w_3$ ,  $\hat{v}_1$  y  $\hat{v}_2$ , resolver para  $\hat{v}_3$ ; por lo tanto



en esta dirección se puede escribir explícitamente

$$\hat{v}_3 - \frac{\hat{j}^{13}}{\hat{j}^{33}}(v_1 - \hat{v}_1) - \frac{\hat{j}^{23}}{\hat{j}^{33}}(v_2 - \hat{v}_2) - v_3 = -\frac{\hat{j}}{\hat{j}^{33}}w_3 \quad (36)$$

o bien

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x_{3s}}{\partial t} \Big|_{\chi} - \frac{v_1 - \hat{v}_1}{\hat{j}^{33}} \hat{j}^{13} \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1}, \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2} \right) \\ & - \frac{v_2 - \hat{v}_2}{\hat{j}^{33}} \hat{j}^{23} \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1}, \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2} \right) - v_3 = \frac{-w_3}{\hat{j}^{33}} \hat{j} \left( \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1}, \frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\hat{v}_3$  se ha substituido por  $\frac{\partial x_{3s}}{\partial t} \Big|_{\chi}$ ;  $\hat{j}^{13}$ ,  $\hat{j}^{23}$ , y el jacobiano  $\hat{j}$  son funciones de  $\frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_1}$  y de  $\frac{\partial x_{3s}}{\partial \chi_2}$ ;  $\hat{j}^{33}$  es independiente de  $x_{3s}$ ; y  $x_{3s}$  es la ecuación de la superficie libre. En la Ec. (37)  $x_{3s}$  es la función incógnita mientras que  $w_3$ ,  $\hat{v}_1$  y  $\hat{v}_2$  son conocidas. Si  $\hat{v}_1 = \hat{v}_2 = 0$  (i.e. la descripción Euleriana se emplea en las direcciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$ ), se obtiene de nuevo la ecuación cinemática de una superficie, Ec. (31). Con una formulación mixta se pueden prescribir  $\hat{v}_1$  y  $\hat{v}_2$  (como un porcentaje de la celeridad del frente de onda, por ejemplo) y consecuentemente obtener mejores resultados que cuando se fijan  $\alpha_{11}$  y  $\alpha_{22}$  en la Ec. (31), cuya interpretación física es mucho más oscura.

Es importante observar que con una formulación mixta las ecuaciones de actualización de la malla (Ecs. (35) y (36)) se resuelven, exclusivamente, a lo largo de los contornos en movimiento; mientras que con el método de la matriz de Euler-Lagrange las ecuaciones de actualización de la malla (Ec. (30)) se resuelven en todo el dominio y su contorno. Como se comentó anteriormente dentro del dominio existen diversas técnicas para realizar el remallado; por ejemplo, se pueden utilizar ecuaciones potenciales de remallado clásico, o bien definir las velocidades en el interior como un porcentaje de las del contorno. Estos métodos se aplican al análisis de la rotura de una presa y al chapoteo de gran amplitud.

## 5.- FORMULACIÓN PETROV-GALERKIN DE LA FORMA DÉBIL

El problema de contorno ha quedado completamente definido por las ecuaciones de continuidad y equilibrio, las condiciones de contorno, la ecuación constitutiva y la ecuación de actualización de la malla. Para resolver este problema por el método de los Elementos Finitos, las ecuaciones diferenciales citadas anteriormente deben transformarse en sus equivalentes integrales. Este paso se realiza mediante la teoría de residuos ponderados que puede formularse de diversas maneras. Aquí se utiliza la formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente para la ecuación de equilibrio y de actualización de la malla, mientras que se emplea Galerkin para la ecuación de continuidad. Además la formulación mixta presión-velocidad ( $P-v$ ) implementada aumenta la eficiencia y exactitud numéricas. Al utilizar elementos de presión constante, las funciones de peso e interpolación son constantes dentro del elemento y discontinuas en su contorno. La función de peso para la ecuación de continuidad se denota por  $\delta P$ , y la ecuación integral asociada a la de continuidad, Ec. (22), se escribe

$$\sum_e \int_{R_x^e} \delta P \frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta P \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dR_x = 0 \quad (38)$$

donde se ha discretizado el dominio espacial,  $R_x$ , en subdominios,  $R_x^e$ , y  $\sum_e$  simboliza la suma sobre todos los elementos.

La formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente requiere funciones de peso de la forma

$$\delta \mathbf{v} = \delta \boldsymbol{\omega} + \delta \mathbf{p} \quad (39)$$

donde  $\delta \boldsymbol{\omega}$  es continua en  $R_x$  y  $\delta \mathbf{p}$  representa la perturbación discontinua ponderada a contracorriente;  $\delta \mathbf{p}$  se supone continua y diferenciable en el interior de los elementos. Se puede demostrar (Brooks y Hughes, 1982) que ponderar el término convectivo de la Ec. (21b) con  $\delta \mathbf{v}$  es equivalente a introducir una difusividad artificial en esta ecuación. Si se desea obtener una formulación consistente no se puede ponderar exclusivamente el término convectivo con  $\delta \mathbf{v}$  mientras los demás se multiplican por la función continua clásica:  $\delta \boldsymbol{\omega}$ , sino que todos los términos deben de multiplicarse por  $\delta \mathbf{v}$ . La ecuación integral asociada a la Ec. (21b) es

$$\int_{R_x} \delta \omega_i \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} + \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \right) dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta p_i \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} + \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \right) dR_x = 0 \quad (40)$$

que junto con la ecuación constitutiva, Ec. (26), y las condiciones de contorno naturales, Ec. (24b), da

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\chi} dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dR_x - \\
& \int_{R_x} \frac{\partial(\delta \omega_i)}{\partial x_i} P dR_x + \int_{R_x} \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\partial(\delta \omega_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta \omega_j)}{\partial x_i} \right] \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] dR_x - \\
& \sum_e \int_{R_x^e} \delta p_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dR_x - \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho g_i dR_x - \\
& \int_{\partial R_x^h} \delta \omega_i h_i dS = 0 \quad . \quad (41)
\end{aligned}$$

Como consecuencia de la extensa discusión presentada por Hughes y Brooks (1982), se desprecia en la ecuación anterior, la influencia de la perturbación,  $\delta \mathbf{p}$ , en el término de difusión,  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ . En este caso, se puede observar en la Ec. (41) que la perturbación de la función de peso sólo afecta los términos de masa, de convección y de fuerzas volumétricas; mientras que los términos viscosos, de presión y de fuerzas sobre el contorno no están influenciados.

Finalmente, la ecuación integral asociada con las ecuaciones de actualización de la malla, Ecs. (30) o (35b), se obtiene aplicando de nuevo una formulación de Petrov-Garlerkin ponderada a contracorriente. Las funciones de peso,  $\delta \mathbf{x}$ , se componen de nuevo, de dos términos: las funciones de interpolación continuas y las de perturbación. Obsérvese que en este caso, las ecuaciones son puramente convectivas, por lo tanto se sigue la metodología de Hughes y Tezduyar (1984) para obtener la forma débil, a partir de la Ec. (30)

$$\int_{R_\chi} \delta x_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\chi} dR_\chi + \int_{R_\chi} \delta x_i (\delta_{jk} - \alpha_{jk}) v_k \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dR_\chi - \int_{R_\chi} \delta x_i v_i dR_\chi = 0 \quad (42a)$$

y a partir de la Ec. (35b)

$$\begin{aligned}
& \int_{R_\chi} \delta x_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\chi} dR_\chi - \int_{R_\chi} \delta x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{NSD} \frac{v_j - \hat{v}_j}{\hat{j}_{ii}} \hat{j}^{ji} dR_\chi - \\
& - \int_{R_\chi} \delta x_i \left( v_i - \frac{\hat{j}}{\hat{j}_{ii}} w_i \right) dR_\chi = 0 \quad (42b)
\end{aligned}$$

Una descripción más detallada de  $\delta \mathbf{x}$  para ambas técnicas de remallado puede encontrarse en el Apéndice B. En general la Ec. (42b) puede ser

empleada para actualizar toda la malla de elementos finitos, pero para optimizar la eficiencia de cálculo, dicha ecuación sólo se aplica a la superficie libre mientras que formulaciones más sencillas se implementan para el interior del dominio; véanse por ejemplo, el flujo de un fluido sobre un lecho seco o bien el problema de chapoteo que se presentan más adelante.

Obsérvese que las ecuaciones de continuidad y de equilibrio, Ecs. (38) y (41), se integran sobre el dominio espacial; mientras que las de actualización de la malla están definidas de forma referencial y por lo tanto, sus ecuaciones variacionales asociadas, Ec. (42), se integran directamente sobre la referencia fija.

La perturbación discontinua ponderada a contracorriente,  $\delta \mathbf{p}$ , se escribe como (Brooks y Hughes, 1982)

$$\delta p_i = \frac{\partial(\delta \omega_i)}{\partial x_j} \frac{\bar{k} c_j}{\|\mathbf{c}\|^2} \quad (43)$$

donde la difusividad artificial,  $\bar{k}$ , se define con un criterio espacial (Brooks y Hughes, 1982)

$$\bar{k} = \frac{\bar{\xi} c_\xi h_\xi + \bar{\eta} c_\eta h_\eta}{\sqrt{15}} \quad (44a)$$

o bien con uno temporal (Hughes y Tezduyar, 1984)

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(\bar{\xi} c_\xi^2 + \bar{\eta} c_\eta^2) \Delta t \quad (44b)$$

con

$$\bar{\xi} = \cotgh(\alpha_\xi) - 1/\alpha_\xi \quad \alpha_\xi = \frac{c_\xi h_\xi \rho}{2\mu} \quad (45a)$$

$$\bar{\eta} = \cotgh(\alpha_\eta) - 1/\alpha_\eta \quad \alpha_\eta = \frac{c_\eta h_\eta \rho}{2\mu} \quad (45b)$$



## 6.- ECUACIONES MATRICIALES Y ALGORITMO

Las ecuaciones integrales, Ecs. (38), (41) y (42), después de la integración en el espacio, conducen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{M}^P \dot{\mathbf{P}} + \boldsymbol{\eta}^P(\mathbf{P}) + \mathbf{G}^T \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (46a)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}) + \mathbf{K}_\mu \mathbf{v} - \mathbf{G} \mathbf{P} = \mathbf{f}^{ext} \quad (46b)$$

$$\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{M}} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (46c)$$

donde el superíndice " $T$ " denota matriz traspuesta;  $\mathbf{M}^P$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\hat{\mathbf{M}}$  son las matrices de masa generalizadas para presión, velocidad y velocidad de la malla, respectivamente;  $\boldsymbol{\eta}^P$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  y  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  son los términos convectivos generalizados para presión, velocidad y velocidad de la malla;  $\mathbf{f}^{ext}$  es el vector global de fuerzas externas aplicado al continuo;  $\mathbf{K}_\mu$  es la matriz de viscosidad del fluido;  $\mathbf{G}$  es la matriz operador divergencia;  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  son los vectores de incógnitas nodales para velocidad, presión y velocidad de la malla, respectivamente; y  $\dot{\mathbf{P}}$  y  $\mathbf{a}$  son las derivadas temporales de la presión y la velocidad material manteniendo la referencia fija. Las definiciones de estas matrices y vectores se pueden encontrar en el Apéndice B. Obsérvese que la Ec. (46c) es la forma matricial de la Ec. (42b) si, como es usual, las superficies a actualizar son materiales.

Las Ec. (46a) y (46b) se resuelven utilizando el algoritmo predictor-corrector presentado por Liu y Gvildys (1985). Una vez calculados los campos de presión y velocidad, se resuelve la Ec. (46c) utilizando de nuevo un algoritmo predictor-corrector. Este último paso crea una importante carga numérica puesto que el bucle para el cálculo de la Ec. (46c) se encuentra dentro del bucle principal para evaluar el campo de velocidades y presiones, i.e. Ecs. (46a) y (46b). Pero es importante observar que para evitar "difusión" entre nodos Lagrangianos y Eulerianos (ver Hughes et al., 1981), la Ec. (46c) se obtiene tras aplicar la cuadratura de Lobatto; por lo tanto,  $\hat{\mathbf{M}}$  es diagonal y la resolución de la Ec. (46c) es explícita.

Para aumentar la eficiencia numérica del programa, se pueden implementar incrementos de tiempo variable. Los límites de estos incrementos se encuentran en Carey y Oden (1985). La ecuación de equilibrio para un fluido viscoso es del tipo de convección-difusión; su incremento de tiempo para integración se obtiene con la condición más restrictiva entre la de difusión, la de advección y la de Courant-Friedrichs-Levy (C-F-L), tomándose el vector  $\mathbf{c}$  como velocidad de convección. Para la ecuación de actualización de la malla, que representa un proceso de advección puro, sólo se utiliza la condición de C-F-L estando el vector convectivo definido en el Apéndice B para los dos tipos de actualización que aquí se estudian.

Para el caso particular del método de la matriz de Euler-Lagrange con una formulación clásica de Galerkin, la naturaleza particular de la Ec. (46c)

permite que se pueda simplificar a (ver el Apendice C)

$$\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{v} - (\mathbf{L} \mathbf{v}) \mathbf{x} \quad (47)$$

donde  $\mathbf{L}$  es una matriz de tercer orden en banda que se calcula después de leer los datos de entrada del programa, se almacena y se utiliza en cada incremento de tiempo. La matriz generalizada de masa,  $\hat{\mathbf{M}}$ , tiene la misma ventaja numérica y además es diagonal. Recuérdese que estas matrices se obtienen integrando sobre el dominio referencial que es, por definición, fijo en el tiempo. Este procedimiento ahorra sensiblemente el tiempo de cálculo puesto que no es necesario crear matrices en cada incremento de tiempo e iteración para resolver la ecuación de actualización de la malla. El tamaño de  $\mathbf{L}$  es  $\text{NMEQ} \times \text{MAXMN} \times \text{NSD}$ , donde NMEQ es el número de ecuaciones de la malla (una ecuación de la malla existe cuando en un determinado nodo y dirección espacial no se prescribe el movimiento de la malla); MAXMN es la diferencia máxima, para todos los elementos, entre dos números de ecuaciones, correspondientes a nodos de un mismo elemento; NSD es el número de dimensiones espaciales. El tamaño de  $\hat{\mathbf{M}}$  es simplemente NMEQ.

## 7.- EJEMPLOS

### 7.1.- Introducción

En esta sección, se aplica la formulación ALE a cuatro problemas de ingeniería. El primero es un análisis de interacción fluido estructura donde la metodología ALE permite considerar fenómenos no lineales como la separación del flujo existente en la capa límite o la creación de estelas de remolinos. En este problema se estudian las oscilaciones de un sólido arbitrario inmerso en un fluido viscoso. Se desea evaluar la fuerza que dicho fluido ejerce sobre el sólido y de esta manera desacoplar el problema de interacción simplificándolo a un problema estructural por medio del concepto de masa y amortiguamiento equivalentes.

El siguiente problema es un modelo numérico de propagación de ondas largas contra la plataforma costera ("*Tsunamis*"). Se analiza la reflexión, la transmisión y la propagación de un tren de olas contra la plataforma costera, los resultados de este estudio concuerdan favorablemente con otras soluciones numéricas y con resultados experimentales.

El tercer ejemplo pretende modelar la rotura de una presa y en general, el flujo de un fluido no Newtoniano con grandes desplazamientos de la superficie libre. Este problema, que tiene una solución aproximada para un fluido perfecto deslizándose sobre un lecho sin rozamiento, presenta un reto importante cuando se pretende resolver un caso práctico como por ejemplo, la rotura de embalses de residuos industriales o mineros.



Se han realizado diversos estudios para modelar este mismo problema (ej. Jeyapalan, 1980) u otros similares (ej. Brugnot y Pochet, 1981) pero siempre son necesarias demasiadas hipótesis tanto en (i) el modelo de flujo como en (ii) la caracterización del material. En el presente análisis se ha utilizado el método de los elementos finitos puesto que permite la integración global de las ecuaciones de equilibrio y continuidad en todo el dominio, y la implementación de modelos constitutivos más apropiados al comportamiento de los materiales. A pesar de todo algunas aplicaciones requieren simplificaciones que podrían dar lugar a futuras mejoras.

En el último ejemplo se imponen oscilaciones horizontales a un depósito de agua para evaluar su chapoteo. El tratamiento no lineal del movimiento de la superficie libre permite la obtención de buenas comparaciones entre los resultados numéricos y experimentales; además, se puede modelar fácilmente grandes amplitudes de oleaje (por ejemplo del 50% de la profundidad del depósito).

## 7.2.— Interacción fluido viscoso – sólido rígido

En este apartado presenta la aplicación de la formulación ALE a un problema de interacción fluido viscoso estructura, donde se evalúa la fuerza que el fluido ejerce sobre el sólido mientras este último oscila. Este análisis sin superficie libre pero con grandes movimientos de contorno se encuadra en el caso de *movimiento de la malla prescrito a priori*, desde el punto de vista del remallado. El movimiento del cuerpo está gobernado por su masa, la rigidez y el amortiguamiento de la estructura, el fluido viscoso que lo rodea y la fuerza externa que actúa sobre él (véase la Figura 2). En la práctica ingenieril usual, se emplea el concepto de masa hidrodinámica o masa equivalente para introducir la influencia sobre el sólido del fluido no viscoso, ver Fritz (1977) o Liu et al. (1984). Pero cuando se estudian fluidos viscosos, la fuerza que el fluido ejerce sobre el cuerpo no puede ser descrita únicamente por la masa equivalente, y es necesario introducir el concepto de amortiguamiento equivalente. Para evitar el acoplamiento entre el sistema estructural (masa – muelle – amortiguamiento) y la ecuaciones no lineales de Navier-Stokes, la ecuación del sólido rígido puede escribirse como:

$$M\ddot{d}_1 + C\dot{d}_1 + Kd_1 = F_{ext} - F_f \quad (48)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son, respectivamente, la masa, el amortiguamiento y la rigidez de la estructura, mientras que  $F_{ext}$  y  $d_1$  son la fuerza externa y el desplazamiento horizontal del sólido. Los puntos denotan derivadas materiales con respecto al tiempo.  $F_f$  es la fuerza resultante sobre el sólido que ejerce el fluido (i.e. sin modelar, en realidad, el flujo viscoso) y se supone de la forma:

$$F_f = M_{eq}\ddot{d}_1 + C_{eq}\dot{d}_1 \quad (49)$$

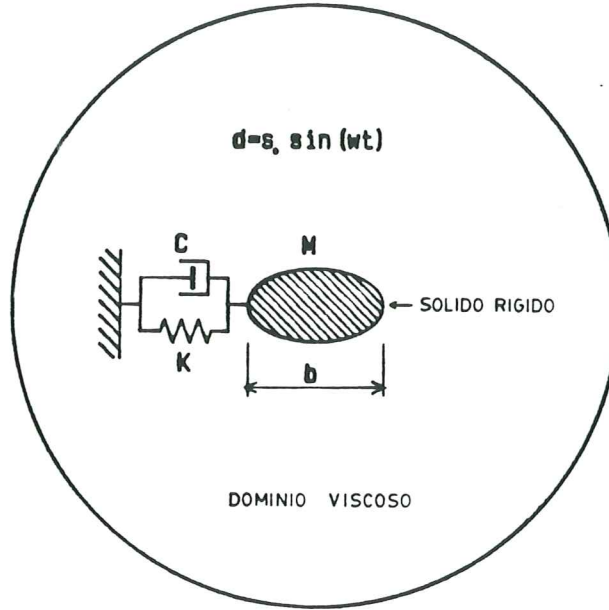


FIGURA 2. Interacción fluido viscoso-sólido rígido: esquema del problema

siendo  $M_{eq}$  y  $C_{eq}$  la masa y el amortiguamiento equivalentes. Substituyendo la Ec. (49) en la Ec. (50) se obtiene:

$$(M + M_{eq}) \ddot{d}_1 + (C + C_{eq}) \dot{d}_1 + K d_1 = F_{ext} \quad (50)$$

que puede ser resuelta simplemente, siempre que  $M_{eq}$  y  $C_{eq}$  sean datos, puesto que (50) es la ecuación estandar de cálculo dinámico estructural en una dimensión. Los valores de  $M_{eq}$  y  $C_{eq}$  se evalúan, como se verá seguidamente, imponiendo un movimiento oscilatorio al sólido rígido

$$d = s_0 \sin \omega t \quad (51)$$

donde  $s_0$ ,  $\omega$  y  $t$  son la amplitud del movimiento, la pulsación, y el tiempo, respectivamente.

Para determinar  $M_{eq}$  y  $C_{eq}$  se sigue un procedimiento similar al presentado por Liu et al. (1984). Es decir se prescribe el movimiento del sólido y se evalúa la fuerza que el fluido,  $F_f$ , ejerce contra él. Puesto que aceleración y velocidad no pueden aplicarse independientemente entre sí (i.e. prescribir la aceleración igual a uno y la velocidad a cero, o vice versa), se le impone al sólido un movimiento oscilatorio definido por la Ec. (51). De esta manera, una vez evaluada  $F_f$ , se desarrolla en serie de Fourier, y consecuentemente, el término en fase con la aceleración se puede diferenciar del que esté en fase con la velocidad. De estos dos términos se deduce la masa y amortiguamiento equivalentes. El desarrollo en serie de Fourier de  $F_f$  es

$$F_f = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t) \quad (52)$$



donde

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_f dt \quad , \quad (53a)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_f \cos(n\omega t) dt \quad , \quad n = 1, \dots, \infty \quad (53b)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_f \sin(n\omega t) dt \quad , \quad n = 1, \dots, \infty \quad (53c)$$

Si la hipótesis inicial de que  $F_f$  es una combinación lineal de la aceleración y la velocidad es cierta, sólo dos coeficientes ( $A_1$  y  $B_2$ ) son no nulos. Obviamente, dichos coeficientes están asociados con la misma frecuencia que la aceleración y velocidad prescritas. Una vez deducidos los coeficientes  $A_1$  y  $B_2$  a partir de las Ecs. (53b) y (53c), la masa y amortiguamiento equivalentes quedan determinados por:

$$M_{eq} = -\frac{B_1}{s_0\omega^2} \quad , \quad y \quad C_{eq} = \frac{A_1}{s_0\omega} \quad (54)$$

respectivamente.

Para poder determinar los parámetros adimensionales que gobiernan este problema de contorno las ecuaciones de continuidad y equilibrio, i.e. Ecs. (21), junto con la constitutiva, Ec. (24), se escriben de forma adimensional. Se define la dimensión  $b$  del sólido rígido (ver Figura 2) como la escala de longitudes; para la escala de tiempo, se toma  $\omega^{-1}$  y como velocidad característica, se elige  $v_0 = s_0\omega$ . Nótese, a partir de la Ec. (51), que  $v_0$  es la amplitud de la velocidad prescrita al sólido. Finalmente,  $\rho b \omega v_0$  es la presión característica, siendo  $\mu$  la viscosidad absoluta del fluido. En este análisis la gravedad es perpendicular al plano que se considera (i.e. las fuerzas volumétricas son nulas) y se supone que el fluido es incompresible. Por lo tanto las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales se pueden escribir como:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \quad (55a)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{t}} \Big|_{\mathcal{X}} + \beta \bar{c}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{R_\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \right] - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} \quad (55b)$$

donde las barras denotan funciones adimensionales,  $\beta$  es el coeficiente de amplitud de las oscilaciones y  $R_\omega$  se define como el número de Reynolds espectral. A la vista de la ecuación (55b), es evidente que para fluidos no viscosos ( $R_\omega$  tiende a infinito) la ecuación resultante es la ecuación de Euler.

Las soluciones de este problema quedan por lo tanto determinadas por los dos parámetros adimensionales que aparecen en las Ec. (55) y por  $\alpha$ , que está asociado a la geometría. Estos coeficientes se definen de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{D}{b} \quad ; \quad \beta = \frac{s_0}{b} \quad ; \quad y \quad R_\omega = \frac{\rho b^2 \omega}{\mu} = \frac{R_e}{\beta} \quad (56)$$

donde  $D$  es el diámetro del contorno exterior del dominio fluido y  $Re$  es el número de Reynolds clásico, i.e.  $Re = \frac{\rho v_0 b}{\mu}$ . Es fácil observar en la Ec. (55b) que  $\beta$  y  $R_\omega$  están asociados con la convección y la difusión respectivamente. Por lo tanto, para valores “pequeños” de  $\beta$  y de  $R_\omega$  el campo de velocidades está gobernado por la difusión, mientras que para “grandes” valores de  $\beta$  y de  $R_\omega$  la convección domina el flujo.

Para definir el problema de contorno completamente, se presentan a continuación las condiciones de contorno, también en forma adimensional. Las condiciones en velocidades se especifican en los contornos, mientras que la presión sólo debe ser fijada en un punto que se considerará la referencia. En el contorno exterior, definido por un cilindro, y en la perpendicular al eje de simetría la velocidad del fluido es nula; pero en el contorno del sólido rígido, conocida la condición de contorno definida en la Ec. (51), la velocidad adimensional queda definida como:

$$\bar{v}_1(\bar{x}_{1,int} + \bar{d}_1(\bar{t}), \bar{x}_{2,int}) = \cos \bar{t} \quad (57a)$$

$$\bar{v}_2(\bar{x}_{1,int} + \bar{d}_1(\bar{t}), \bar{x}_{2,int}) = 0 \quad (57b)$$

donde

$$\bar{d}_1(\bar{t}) = \beta \sin \bar{t} \quad (57c)$$

y  $\bar{x}_{int}$  son las coordenadas adimensionales del contorno del sólido rígido.

La influencia de  $\beta$  en las ecuaciones de contorno y en las de equilibrio sugiere el uso de técnicas de perturbación para resolver este problema, y de hecho, así lo han resuelto Pattani y Olson (1987). Pero es obvio que esta metodología sólo puede aplicarse cuando  $\beta$  es “pequeño”; en cambio, la formulación Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana no impone ninguna restricción en la magnitud del coeficiente  $\beta$ .

A menos que se resuelva el problema con técnicas de perturbación, las condiciones de contorno en el sólido en movimiento requieren una descripción Lagrangiana. Es decir, la malla debe seguir exactamente el movimiento de las partículas a lo largo de ese contorno. Por otro lado, en el resto del dominio fluido y fundamentalmente lejos del sólido, una descripción Euleriana es preferible puesto que una referencia fija a través de la cual las partículas se desplazan permite grandes distorsiones del continuo. Finalmente, para poder capturar la capa límite y su influencia sobre el sólido, la densidad de elementos debe de aumentar en el entorno del sólido. Estos condicionantes pueden resolverse empleando la formulación ALE: (i) a lo largo del contorno del sólido, el movimiento de la malla se prescribe igual al de las partículas, (ii) lejos de las oscilaciones impuestas la malla está fija, y (iii) se define entre medio una zona de transición prescribiendo arbitrariamente un movimiento

de la malla. Las velocidades de la malla se definen, por consiguiente,

$$\hat{v}_1 = \begin{cases} \frac{s_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{l\pi}{L} \right) \right] \omega \cos \omega t & \text{si } l \leq L \\ 0 & \text{si } l \geq L \end{cases} \quad (58a)$$

y

$$\hat{v}_2 = 0 \quad (58b)$$

donde  $l$  es la distancia horizontal entre el punto referencial (nodo de la malla) y la superficie del sólido rígido en movimiento, y  $L$  es la distancia arbitraria de transición.

Finalmente, es importante observar la necesidad de emplear la formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente puesto que los efectos convectivos son importantes. En general estos efectos son mayores cerca del sólido en movimiento, pero además, en este caso particular, la convección se ve incrementada durante algunos instantes de las oscilaciones debido al movimiento de la malla. Por lo tanto para números de Reynolds superiores a 50, la formulación de Petrov-Galerkin en la ecuación de equilibrio, es necesaria. El criterio escogido para la perturbación a contracorriente es el temporal puesto que el vector convectivo,  $\mathbf{c}$ , varía con el tiempo, y porque la mayor convección se produce precisamente en los elementos de menor tamaño.

Los resultados numéricos se aplican a un cuerpo circular oscilando sinusoidalmente. Se ha escogido la forma circular para poder comparar la fuerza hidrodinámica que se obtenga con este método y la obtenida por la fórmula de Fritz (1977). Esta última técnica sólo es válida para un cilindro inmerso en un fluido no viscoso, mientras que el método que se presenta puede aplicarse a cualquier forma y Fluido Newtoniano Generalizado.

Todos los cálculos se han realizado en precisión sencilla (32 bits por real\*4) en un IBM-XT con 640 Kbytes de memoria central y un coprocesador matemático 8087. El parámetro adimensional  $\alpha$  se toma constante, igual a 30, a lo largo de todo el análisis. Se evalúa la influencia de los otros dos parámetros que gobiernan el problema (es decir,  $\beta$  y  $R_\omega$ ), variándolos de la siguiente forma: el coeficiente de amplitud de las oscilaciones,  $\beta$ , se toma igual a 0.1, 0.4, 0.75, y 1.0; y el número de Reynolds espectral,  $R_\omega$ , varía entre 20 e infinito. De hecho, estos valores implican que el número de Reynolds ( $R_e = R_\omega \beta$ ) varía entre 2 e infinito.

El incremento de tiempo usado en los cálculos se toma, normalmente, igual a  $\omega \Delta t = \frac{\pi}{20}$ ; pero en los casos extremadamente convectivos o difusivos se reduce a  $\frac{\pi}{28}$ . Como se puede observar en la Figura 3, la malla está compuesta por 224 nodos y 195 elementos cuadrangulares lineales de presión constante. Por último, experiencias numéricas demuestran que la longitud de transición para el movimiento de la malla no tiene influencia en los resultados si  $L \geq 9s_0$ .

Las Figuras 4 y 5 muestran las líneas de corriente instantaneas para  $\beta = 0.1$  y dos números de Reynolds espectrales: 20 y 500. Como era de suponer,



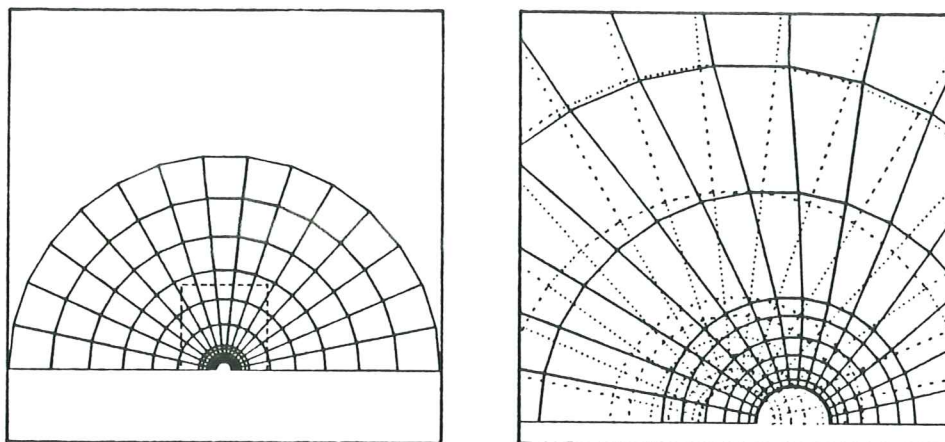


FIGURA 3. Discretizaciones: (a) dominio completo, (b) desplazamientos impuestos a la malla

para un  $R_\omega$  elevado la mayor parte del cizallamiento se concentra en una pequeña capa que rodea al sólido rígido; es decir la capa límite disminuye. Para  $\bar{t} = \frac{\pi}{2}$  se puede observar la aparición de un remolino que desaparece casi instantáneamente. En cambio para un  $\beta$  y  $R_\omega$  elevados el remolino no desaparece y se crea una estela de remolinos, véase la Figura 6 donde  $\beta = 1.0$  y  $R_\omega = 1000$ . Aunque el objetivo de este análisis es simplemente calcular la fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido en movimiento, la Figura 6 sugiere claramente que un estudio de estelas de remolinos puede realizarse con el presente método, siempre que se utilice una malla más refinada lejos del sólido para poder capturar el movimiento de los remolinos.

La distribución de presiones alrededor del cilindro en movimiento para  $\beta = 0.1$  y  $R_\omega = 20$  y  $500$  (i.e.  $Re = 2$  y  $50$ , respectivamente) se presenta en la Figura 7. Se puede observar que el ángulo del punto de estancamiento,  $\theta$ , en  $t = 0$  decrece (i.e. tiende a  $\frac{\pi}{2}$ ) a medida que  $R_\omega$  crece, y que la amplitud de la presión decrece a medida que  $R_\omega$  aumenta. Esta última circunstancia también puede observarse en la Figura 8, donde se muestran las variaciones de la fuerza  $F_f$  con el tiempo. La importancia relativa de las dos componentes de  $F_f$ , i.e. de la masa y amortiguamiento equivalentes, se puede observar en la Figura 8, para diferentes valores de  $R_\omega$ . Por ejemplo, la relación fuerza de amortiguamiento partida por fuerza de masa, decrece de 75% para  $R_\omega = 20$  a 15% para  $R_\omega = 1000$ .

Es importante observar que ambas constantes equivalentes, masa y amortiguamiento, varían con la frecuencia de oscilación para fluidos viscosos. Las Figuras 9 y 10 muestran la dependencia de dichos parámetros con  $R_\omega$ . La primera característica que se observa en estas figuras es que la masa equivalente es independiente del coeficiente de amplitud,  $\beta$ , mientras que el amortiguamiento sí varía para diferentes  $\beta$ 's. En todo caso, como era de esperar, el amortiguamiento equivalente tiende a cero, independientemente

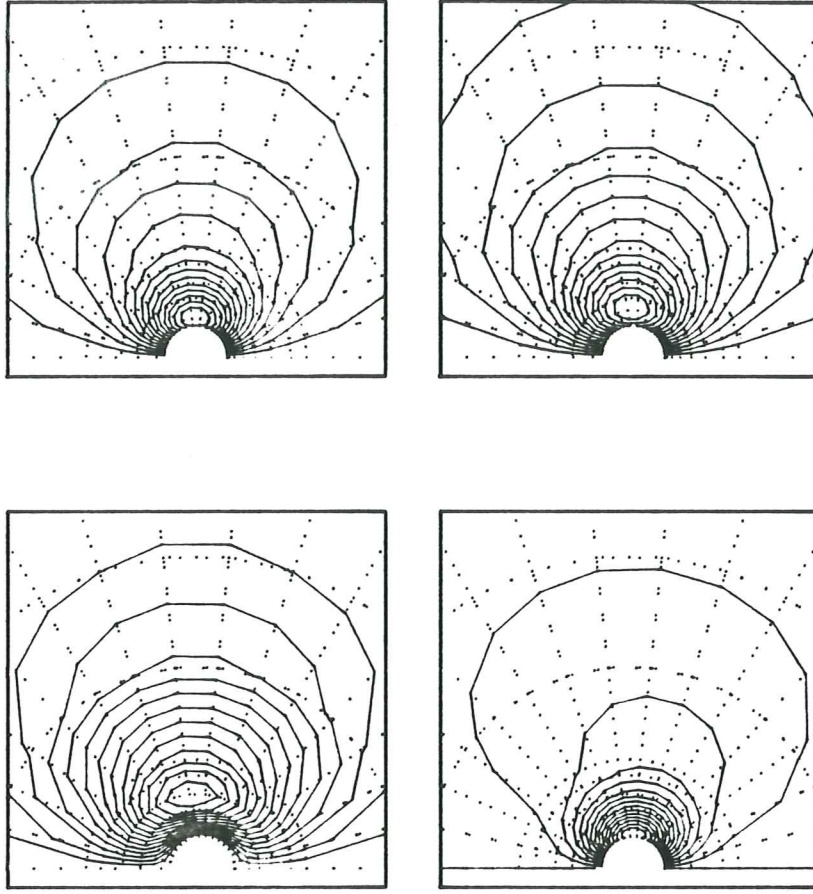


FIGURA 4. Líneas de corriente instantáneas para  $\beta = 0.1$  y  $R_w = 20$  en (a)  $t = 0$ , (b)  $t = \frac{\pi}{4}$ , (c)  $t = \frac{\pi}{2}$  y (d)  $t = \frac{3\pi}{4}$

de  $\beta$ , para  $R_w$  tendiendo a infinito; mientras que la masa equivalente tiende a una constante, 0.8169, muy similar (3% de error relativo) a la aproximación de Fritz (0.7871) cuando  $R_w \rightarrow \infty$ ; la aproximación obtenida se considera excelente puesto que no debe olvidarse que la implementación de este método en un ordenador personal de reducida memoria impone el empleo de una malla bastante grosera. Si los resultados para la masa equivalente se interpolan por mínimos cuadrados usando como límite el valor de Fritz, se obtiene:

$$\bar{M}_{eq} = 5.992R_w^{-0.643} + 0.787 \quad (59)$$

donde  $\bar{M}_{eq}$  es la masa adimensional, es decir

$$\bar{M}_{eq} = \frac{M_{eq}}{\rho b^2} = \frac{-B_1}{\rho b^2 s_0 \omega^2} \quad (60)$$

La correlación obtenida en la interpolación de la Ec. (59) es del 98.3%. Obviamente este valor aumentaría considerablemente si para  $R_w = \infty$  se

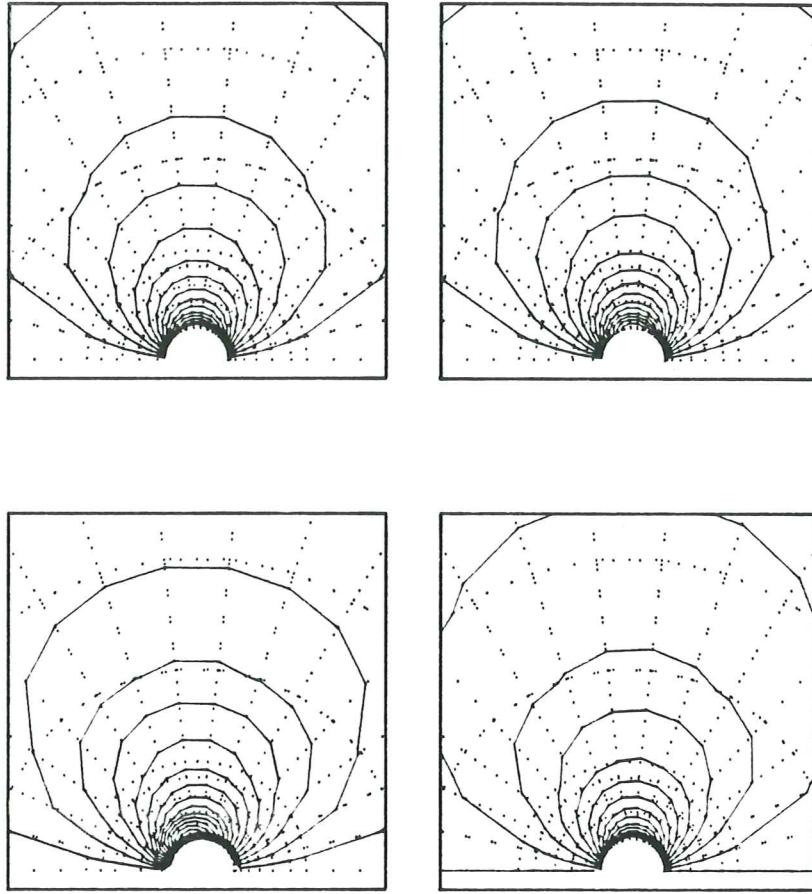


FIGURA 5. Líneas de corriente instantáneas para  $\beta = 0.1$  y  $R_w = 500$  en (a)  $t = 0$ , (b)  $t = \frac{\pi}{4}$ , (c)  $t = \frac{\pi}{2}$  y (d)  $t = \frac{3\pi}{4}$

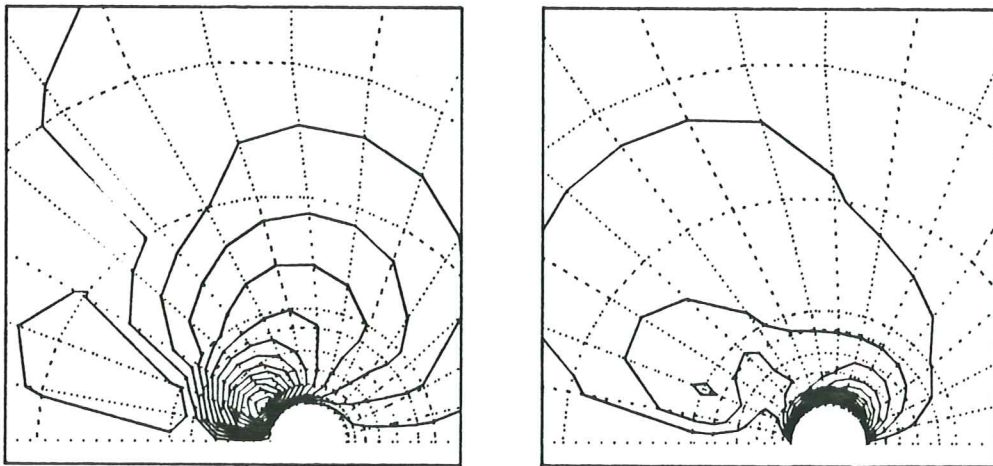


FIGURA 6. Formación de vortices para  $\beta = 0.1$  y  $R_w = 1000$  en (a)  $t = \frac{\pi}{2}$  y (b)  $t = \frac{3\pi}{4}$



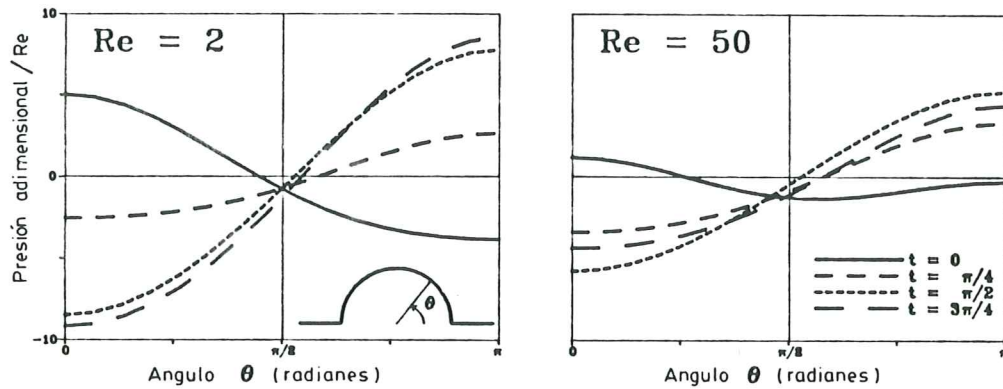


FIGURA 7. Distribución de presiones en el contorno del sólido rígido para  $\beta = 0.1$  y (a)  $R_w = 20$  y (b)  $R_w = 500$

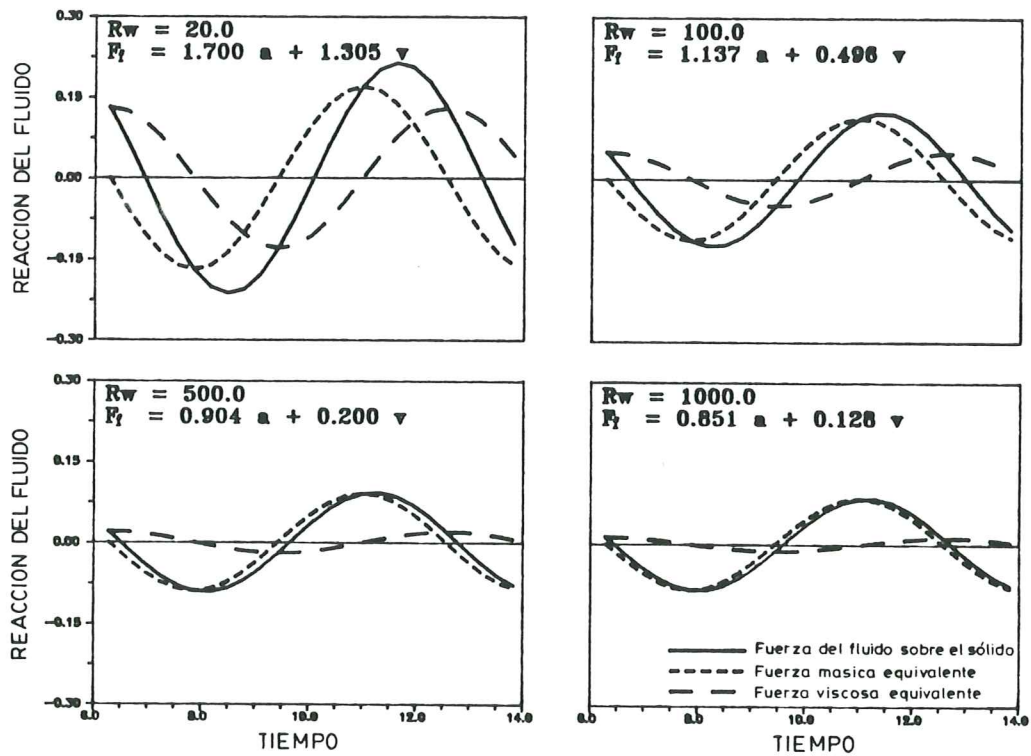


FIGURA 8. Variación temporal de la fuerza del fluido sobre el sólido rígido,  $F_f$ , y de su descomposición en términos de masa y amortiguamiento equivalentes para  $\beta = 0.1$

tomara el valor calculado en vez del obtenido por la fórmula de Fritz; pero es evidente que esta fórmula es el método más sencillo y común para aproximar  $M_{eq}$  cuando el fluido es no viscoso. la interpolación para el amortiguamiento equivalente es más complicado puesto que depende de  $R_w$  y de  $\beta$ . Pero la Figura 10 sugiere que  $\beta$  sólo afecta la pendiente de la curva log-log. Por lo

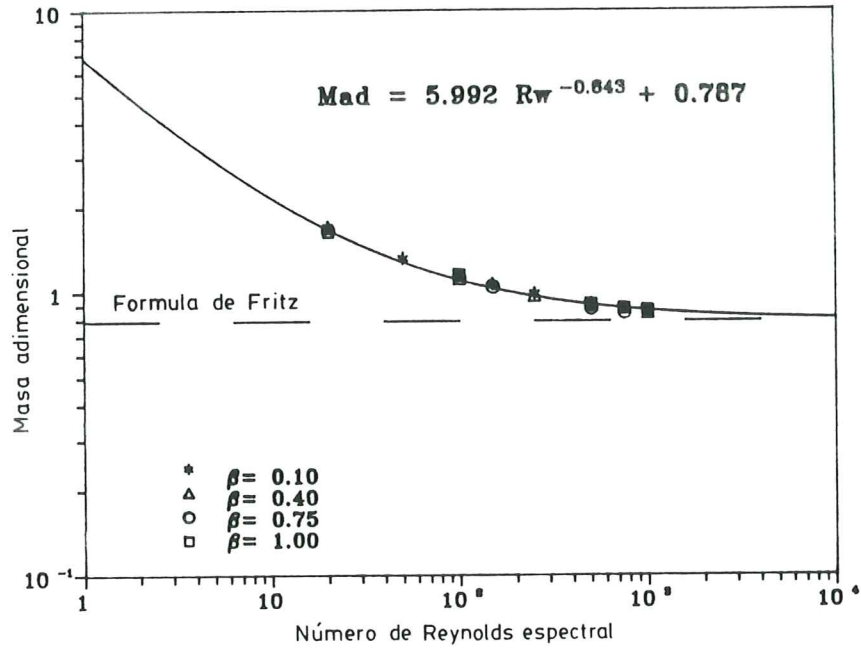


FIGURA 9. Variación de la equivalente adimensional,  $\bar{M}_{eq}$ , con número de Reynolds espectral,  $R_w$

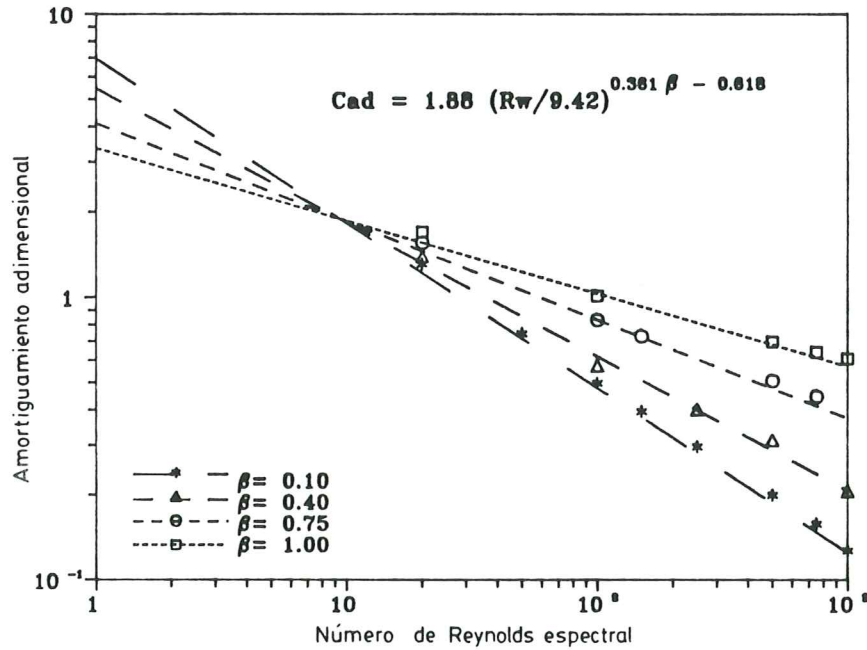


FIGURA 10. Variación del amortiguamiento equivalente adimensional,  $\bar{C}_{eq}$ , con el número de Reynolds espectral,  $R_w$

tanto, se obtiene la siguiente interpolación:

$$\bar{C}_{eq} = 1.88 \left( \frac{R_w}{9.42} \right)^{0.361\beta - 0.618} \quad (61)$$



donde

$$\bar{C}_{eq} = \frac{C_{eq}}{\rho b^2 \omega} = \frac{A_1}{\rho b^2 s_0 \omega^2} \quad (62)$$

y las curvas dibujadas en la Figura 10 son las obtenidas de la aplicación directa de la Ec. (61) para los diferentes parámetros  $\beta$  y  $R_\omega$ .

Finalmente, es importante hacer notar que el método ALE es aplicable cuando hay grandes desplazamientos del contorno conocidos a priori; y que los conceptos de masa y amortiguamiento equivalentes para reducir un problema de interacción fluido viscoso estructura a un problema estandar de cálculo dinámico estructural, no sólo son validos sino que además pueden implementarse fácilmente por medio de sencillas fórmulas como las que aquí se han obtenido para una geometría particular.

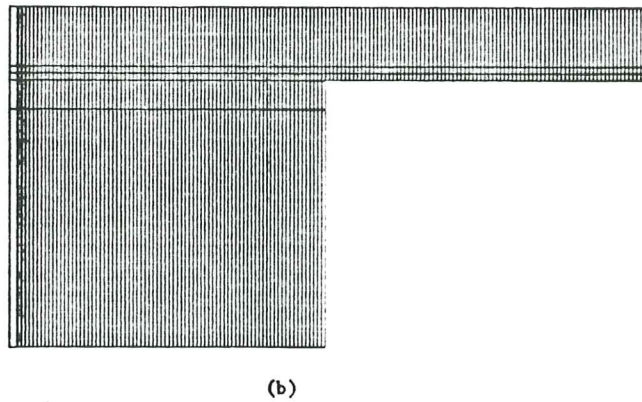
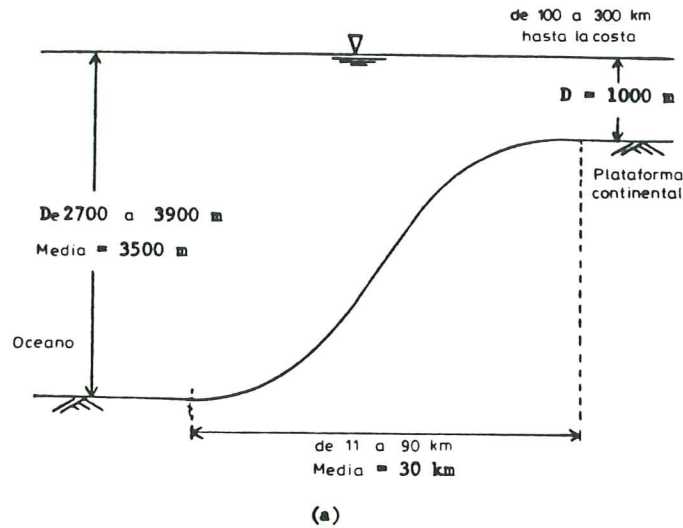


FIGURA 11. Diagrama esquemático de (a) plataforma continental y (b) modelo por elementos finitos

### 7.3.— Propagación de olas largas—Tsunamis

Los Tsunamis son ondas largas (i.e. olas con longitud de onda muy superior a la profundidad del agua donde se propagan) generadas normalmente por maremotos.

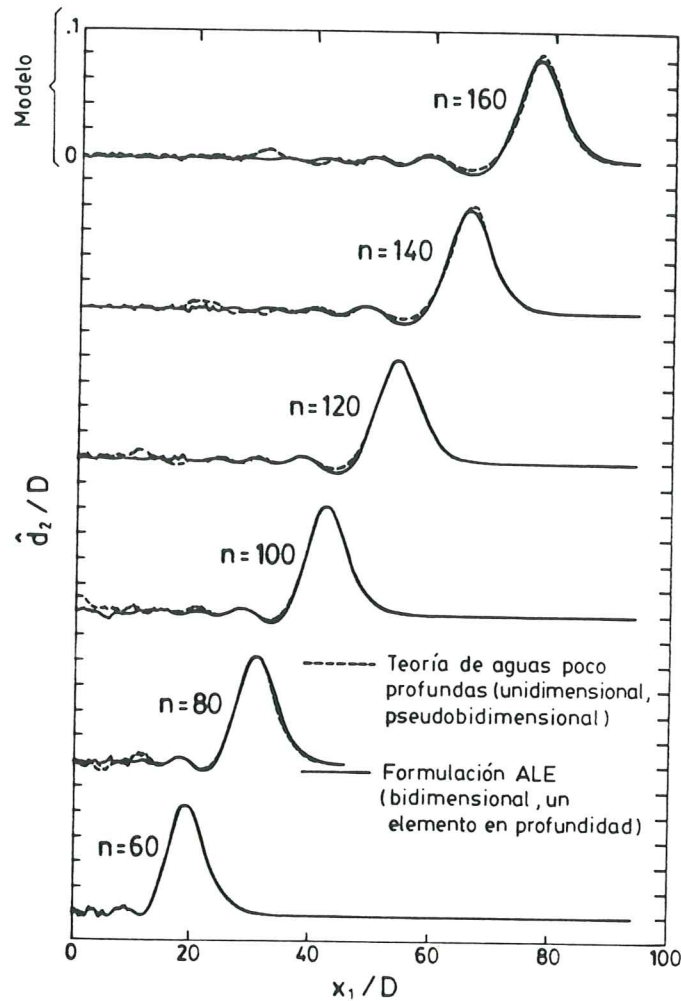


FIGURA 12. Comparación entre los resultados de la teoría de aguas poco profundas unidimensional y una Formulación Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana bidimensional. De Hughes, Liu y Zimmermann (1981)

La Figura 11a presenta una sección esquemática de la plataforma continental de la costa Californiana, y la Figura 11b presenta la discretización utilizada después del correspondiente escalado por las dimensiones características (Goring, 1978). Obsérvese como en el problema adimensional el talud continental puede aproximarse por un escalón. En este problema se pueden distinguir diferentes fases: primero, la propagación

de la ola incidente hacia la plataforma costera en una zona de profundidad constante; luego cuando la ola llega al talud, la generación de la onda reflejada y transmitida; y finalmente, la propagación de estas últimas a profundidad constante.

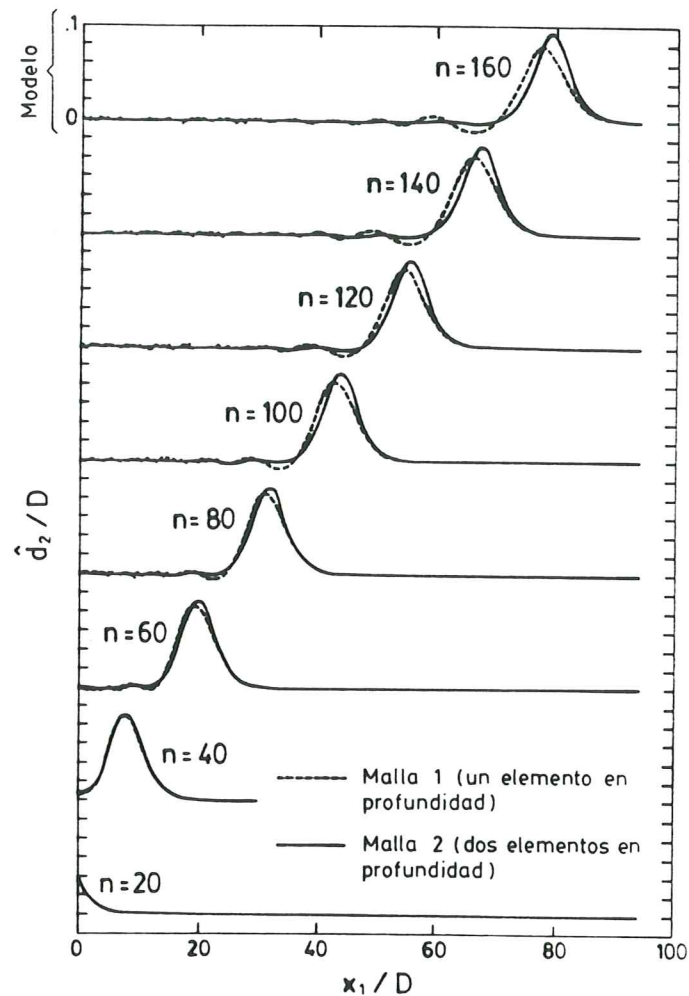


FIGURA 13. Comparación entre los resultados para uno y dos elementos en profundidad. De Hughes, Liu y Zimmermann (1981)

Se estudia primero la propagación de una ola solitaria a profundidad constante. La teoría de aguas poco profundas (Strelkoff, 1969) es el enfoque clásico para este problema, pero Hughes, Liu y Zimmermann (1981) aplicaron el método ALE y obtuvieron resultados concordantes con ambas teorías. Más aún, según los citados autores la técnica ALE con dos elementos en profundidad era más consistente con los resultados experimentales que la teoría de aguas poco profundas puesto que se reducía considerablemente la dispersión creada al paso de la ola, véanse las Figuras 12 y 13.

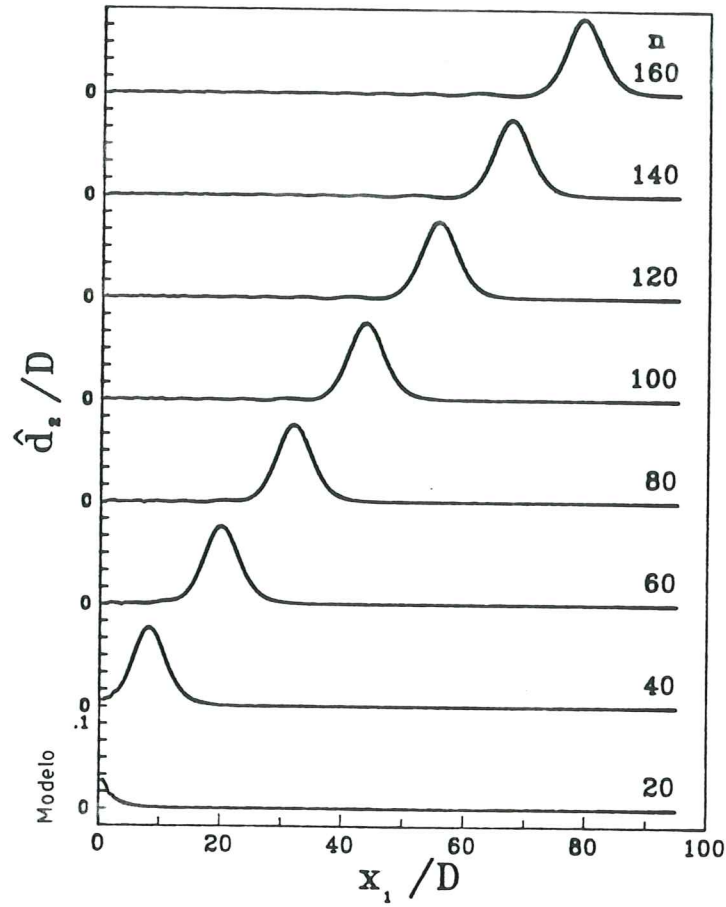


FIGURA 14. Resultados para un solo elemento en profundidad con la presente formulación (ola incidente)

El primer ejemplo que se analiza es el mismo planteado por Hughes et al. (1981); es decir, se genera una ola prescribiendo la trayectoria del contorno izquierdo del dominio (i.e. el movimiento del muro izquierdo del tanque):

$$d_1 = \frac{\eta}{\kappa} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\kappa c t}{D} - 4 \right) \right] \quad (63a)$$

donde

$$c = \sqrt{g(D + \eta)} \quad , \quad (63b)$$

$$\kappa = \sqrt{3\eta/4D} \quad , \quad (63c)$$

$g = 1$ ,  $L = 949.095$ ,  $D = 10$ , y  $\Delta t = 1.7888$ . A lo largo de todo el contorno, exceptuando la superficie libre, se supone que el deslizamiento es perfecto (tensión tangencial nula) puesto que el agua puede considerarse para este problema como un fluido no viscoso. Además, en este caso ambas técnicas de remallado, el método de la matriz de Euler-Lagrange y la formulación mixta,



son equivalentes porque horizontalmente, la descripción es Euleriana. La Figura 14 presenta los resultados obtenidos con un elemento en profundidad y una malla de 160 elementos cuadrangulares de cuatro nodos, como la que emplearon Hughes et al. (1981) en su primera aproximación.

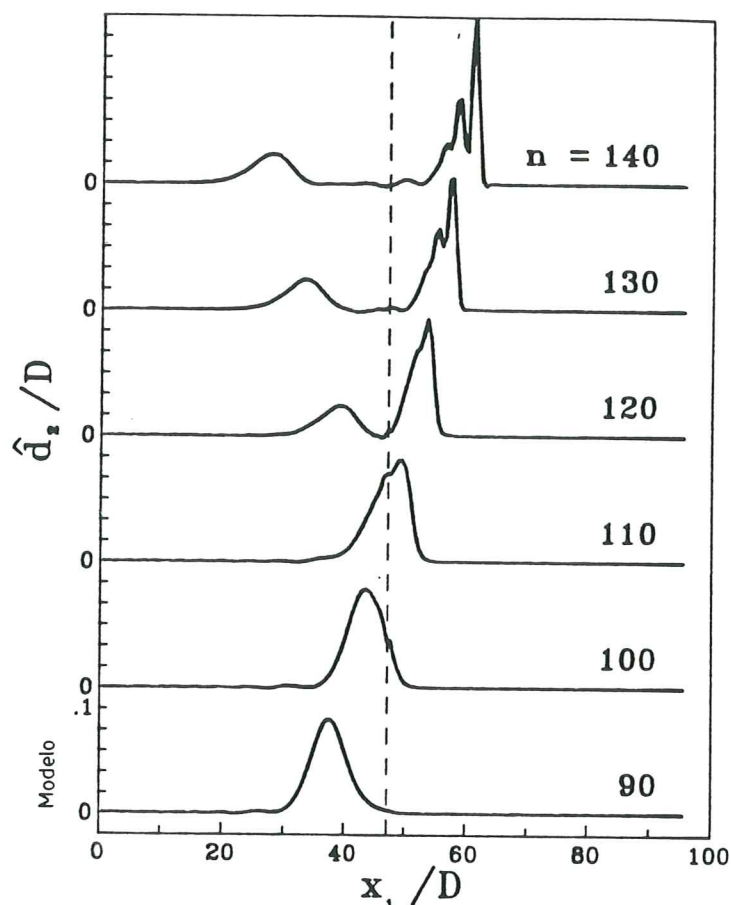


FIGURA 15. Reflexión y transmisión de una ola incidente sobre un escalón con  $D_1/D_2 = 4.0$

Comparando los resultados de la Figura 14 con los representados en las Figuras 12 y 13, es obvio que el algoritmo predictor-corrector que se ha implementado con un solo elemento en profundidad y en precisión simple (32 bits por cada real\*4), da mejores resultados que la teoría de aguas poco profundas o la ALE (con formulación implícita y doble precisión, 64 bits por cada real\*8) con el mismo número de elementos; de hecho, los resultados obtenidos se comparan mucho mejor con la solución de Hughes et al. (1981) para dos elementos en profundidad. La variación del volumen de la ola durante 320 pasos en el tiempo (i.e. la ola cruza el tanque, se refleja y vuelve a recorrer todo el tanque) es tan sólo de 0.02%. Esta mejora en los resultados es debida en parte, al hecho de que la formulación  $P-v$  modela la

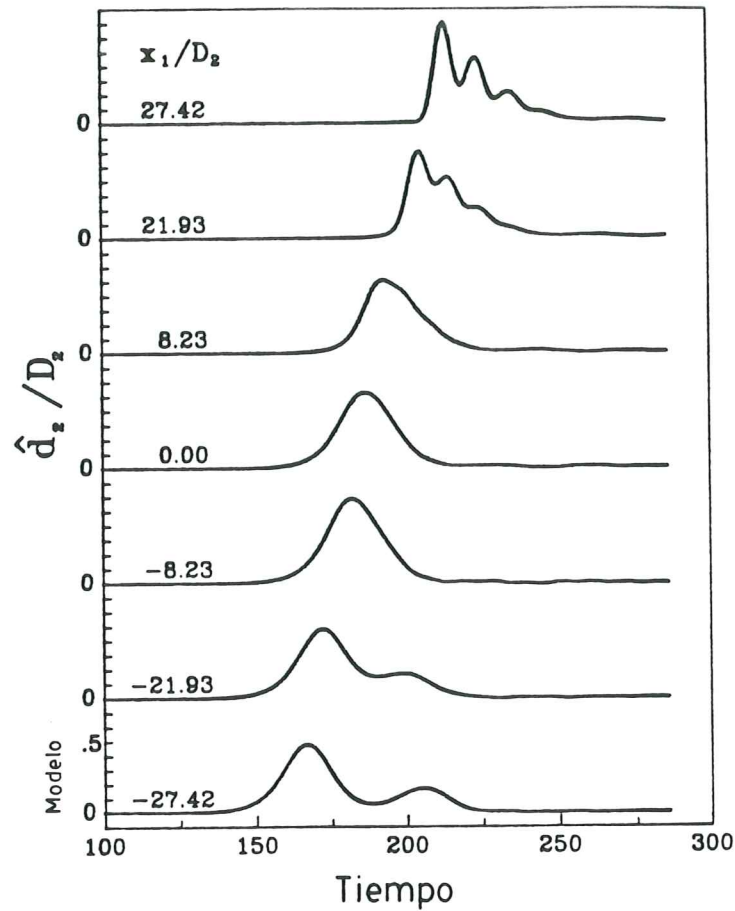


FIGURA 16. Oscilaciones de la superficie en diferentes puntos para  $D_1/D_2 = 4.65$  y  $\eta/D_1 = 0.95$

incompresibilidad del fluido con una mayor precisión que las formulaciones de penalty y también, a las dos iteraciones, en vez de una, que se utilizan para resolver la ecuación no lineal del movimiento de la superficie libre.

La Figura 15 presenta la reflexión y transmisión de una ola generada como la anterior, sobre un escalón de relación  $D_1/D_2 = 4$ ; este valor escogido es similar a la relación de profundidades existente en la plataforma costera Californiana. La citada figura reproduce claramente la creación de la onda refejada y la forma en que la onda transmitida va cambiando: primero aumenta su amplitud y frecuencia para seguidamente descomponerse en una serie de olas solitarias. Para poder comparar la solución numérica de este problema con los resultados experimentales de Goring (1978), se tomaron los siguientes parámetros:  $D_1 = 10$ ,  $D_1/D_2 = 4.65$ ,  $\eta/D_1 = 0.95$  y  $\Delta t = 0.8944$ . La discretización del dominio fluido que muestra la Figura 11b, consiste en 634 elementos cuadrangulares de cuatro nodos que conducen a 804 nodos en total. La Figura 16 presenta las variaciones, con el tiempo, de diversos puntos de la superficie. Los resultados calculados concuerdan

favorablemente con los experimentales. Más aún, los modelos teóricos aplicados por Goring (1978) (i.e. teoría lineal no dispersiva, teoría no lineal no dispersiva, y teoría no lineal dispersiva — aguas poco profundas) predicen en  $x_1/D_2 \simeq 8.23$  olas de amplitud superior o igual a las de  $x_1/D_2 = 0$ ; en cambio, con el método ALE, se puede observar, como en los resultados experimentales, que en  $x_1/D_2 \simeq 8.23$  la amplitud de la onda decrece un poco. La integración global de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el dominio permite modelar las turbulencias que se crean en la plataforma cerca del escalón, y consecuentemente la difusión de energía que inducen la disminución de la onda. En todo caso es importante observar que la transformación de la onda transmitida en una serie de olas solitarias está más accentuada en el modelo numérico que en los experimentales.

#### 7.4.— Avenida creada por la rotura de una presa

El cálculo de la ola de avenida creada por la rotura de una presa es clásico en la hidrología matemática; Ritter en 1892 fue el primero en resolver el movimiento de un dominio de agua semi infinito, inicialmente en reposo, sobre un lecho horizontal sin rozamiento, utilizando el método de las líneas características. Debido a las diferencias entre la solución de Ritter y los resultados experimentales, Dressler (1952) y Whitham (1955) introdujeron el efecto de la fricción con el fondo; el primero empleó una técnica de perturbación basada en el coeficiente (empírico) de Chézy, mientras que el segundo utilizó el método de Polhausen que se emplea usualmente en problemas de capa límite. Ambas técnicas se ampliaron con la aparición de los ordenadores digitales para tener en cuenta la pendiente del fondo y los depósitos finitos (Sakkar y Strelkoff, 1976; Chen y Armbruster, 1980; y Jeyapalan, 1980, entre otros). En todos estos casos la condición de contorno aguas abajo se solventa introduciendo un espesor pequeño, pero finito, de fluido en reposo, o bien forzando la solución de Whitham para el frente de ola, o bien suponiendo que toda la zona del frente de la ola tiene un movimiento de sólido rígido. En cualquier caso, la característica común más importante de estas soluciones es que todas ellas se basan en la teoría de aguas poco profundas (i.e. ecuaciones de Saint Venant; ej. Strelkoff, 1969).

En la teoría de aguas poco profundas la velocidad de disipación de energía se relaciona unívocamente con la tensión tangencial en el fondo, expresada como en el caso de flujo uniforme y estacionario. Este término de fricción con el fondo se utiliza para hacer coincidir los resultados analíticos con los experimentales, y puede escribirse como:

$$f_0 + f_1 \bar{v} + f_2 \bar{v}^2 \quad (64)$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad media en la sección del canal y  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son la fricción estática, laminar y turbulenta, respectivamente. En los análisis



clásicos de avenidas,  $f_0$  y  $f_1$  son nulas mientras que  $f_2$  se relaciona con el coeficiente de Chézy. Jeyapalan (1980) estudió el flujo de fluidos Newtonianos prescribiendo  $f_0$  y  $f_2$  nulas y relacionando  $f_1$  con la viscosidad; después, hizo una extensión para fluidos de Bingham haciendo de  $f_0$  una función de la tensión de cedencia. Brugnot y Pochet (1981) calcularon  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  experimentalmente para avalanchas de nieve y concluyeron que la longitud de parada de la avalancha es muy sensible a estos coeficientes.

Las ecuaciones de Saint Venant tienen otras hipótesis inherentes, por ejemplo: la distribución de velocidades en una sección del canal se supone esencialmente uniforme y que la curvatura de las líneas de corriente se considera despreciable (i.e. flujo paralelo y por lo tanto distribución de presiones hidrostática).

En este estudio se plantea el problema de la avenida producida por la rotura de una presa sin los condicionantes impuestos por la teoría de aguas poco profundas y se analizan dos problemas: flujo sobre un fluido en reposo (FFR) y flujo sobre un fondo seco (FFS). En ambos casos se verifica la exactitud del método ALE comparando los resultados de este análisis con soluciones analíticas aproximadas para fluidos no viscosos; finalmente se estudia y discuten los flujos de fluidos viscosos.

El problema adimensional se define tomando las siguientes constantes características: para la escala de longitudes, la altura de la presa,  $H$ , sobre el fondo seco o sobre la superficie del fluido en reposo; como la velocidad característica,  $\sqrt{gH}$ ; y  $\rho gH$  como la presión característica. La escala de tiempo se toma arbitrariamente como la longitud característica partida por la velocidad característica, i.e.  $\sqrt{H/g}$ .

Consecuentemente, si el fluido es Newtoniano, el único parámetro adimensional asociado con las ecuaciones de equilibrio y continuidad es el número de Reynolds,  $Re = H\sqrt{gH}/\nu$ , donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Pero este problema, en general, está gobernado por otros parámetros además de  $Re$ ; por ejemplo, el talud de la presa, la altura del fluido en reposo y el tipo de modelo no Newtoniano que se emplee. Un análisis paramétrico más completo se puede encontrar en Huerta (1987), donde se discute la influencia de los parámetros físicos citados y otras constantes numéricas.

El análisis de una avenida creada por la rotura de una presa presenta otros retos importantes además de las dificultades clásicas asociadas con flujos de superficie libre y las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles. En primer lugar, la discretización del dominio para fluidos viscosos, no es evidente. Para poder capturar la variación de velocidades en la capa límite es necesario utilizar elementos suficientemente pequeños; pero aguas arriba y aguas abajo de la ola, donde el fluido está en reposo, la difusión gobierna el proceso y por lo tanto conviene, para no disminuir demasiado el incremento de tiempo, utilizar elementos de mayor tamaño. Esto último contrasta con el hecho de que en la zona cercana a la ola, los procesos de convección,



con sus problemas inherentes de discretización en el tiempo, son los que dominan el comportamiento del fluido. Y finalmente, no se debe olvidar la naturaleza transitoria del problema que produce un continuo cambio de la zona convectiva y difusiva impidiendo soluciones clásicas como el uso de elementos pequeños en la primera y de elementos grandes en la segunda.

Otra diferencia importante entre el problema de la rotura de una presa y otros análisis de propagación de ondas, son los instantes iniciales del flujo. Mientras que en el problema del Tsunami la ola se genera de forma continua desde una posición de equilibrio, en el presente problema, la tendencia natural del flujo es a tener aceleraciones iniciales extremadamente elevadas puesto que en  $t = 0^+$  el dominio fluido no está en equilibrio. De hecho, la teoría de aguas poco profundas predice una discontinuidad de velocidades en  $t = 0$  (i.e. aceleraciones infinitas). Por lo tanto, la solución numérica tiene tendencia a oscilar, y para resolver el problema es necesario, algunas veces, imponer un cierto amortiguamiento numérico (i.e. el parámetro de Newmark  $\gamma > 0.5$ ).

Finalmente, se debe observar que la convección de la superficie libre es extremadamente alta; por ejemplo, en el problema de la rotura de una presa, las pendientes de la superficie libre son o verticales, o 1:1 extendiéndose sobre un elemento, mientras que en el estudio de Tsunamis, la pendiente de la ola era de 1:50 extendiéndose sobre diez elementos aproximadamente. Debido a esta elevada convección, el problema de la rotura de una presa es un test clásico para algoritmos numéricos, ver por ejemplo el análisis de Löhner, Morgan y Zienkiewicz (1984) en el que se se trabaja con la teoría de aguas poco profundas. En el presente enfoque, este test es todavía más severo puesto que las ecuaciones de Navier-Stokes (ecs. convectivas-difusivas) están acopladas con las de actualización de la malla (ecs. puramente convectivas), y estas últimas definen el contorno donde deben de verificarse las primeras.

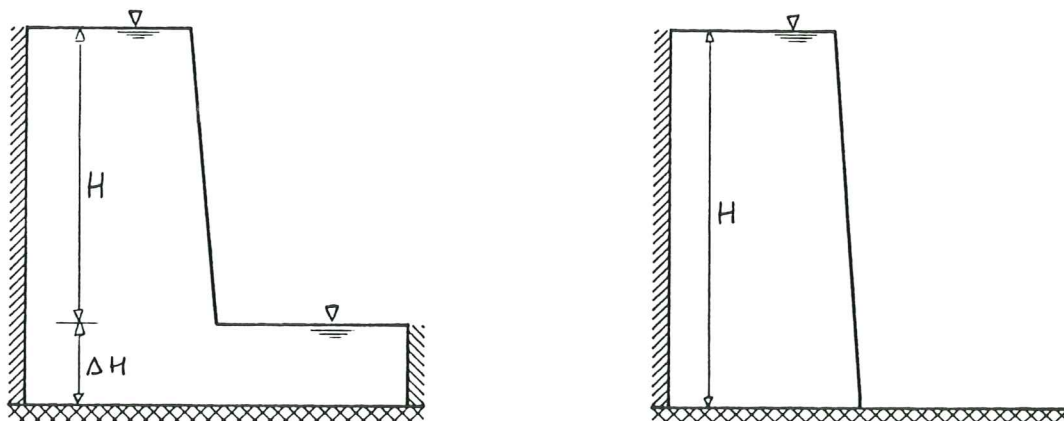


FIGURA 17. Planteamiento esquemático del análisis de una avenida creada por la rotura de una presa (a) flujo sobre fluido en reposo, (b) flujo sobre fondo seco

Todas las dificultades citadas anteriormente más las inherentes a los problemas de superficie libre han impedido hasta hace poco la resolución del problema de la rotura de una presa utilizando algoritmos que integren globalmente las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio.

La Figura 17 presenta una esquematización del problema de la rotura de una presa para el flujo sobre fluido en reposo y para el flujo sobre fondo seco; puesto que siempre se estudia el problema adimensional,  $H$  es siempre igual a uno. El caso de FFR se analiza primero.

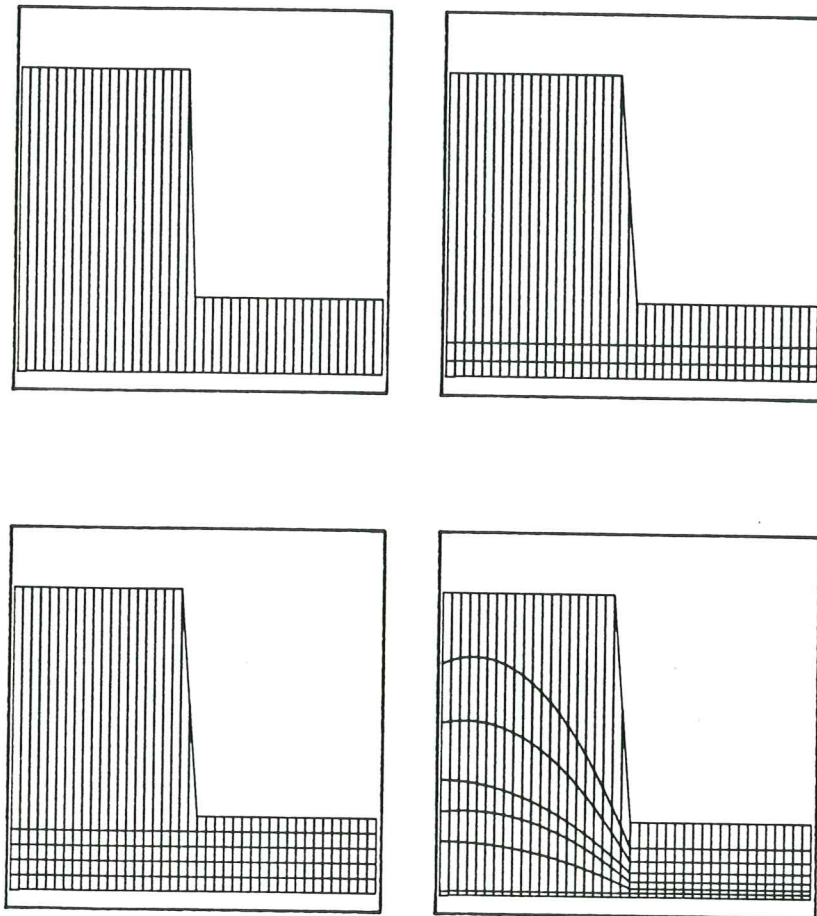


FIGURA 18. Mallas de elementos finitos empleadas para el análisis de FFR (a)  $41 \times 1$ , (b)  $41 \times 3$ , (c)  $41 \times 5$  y (d)  $41 \times 7$

### Flujo sobre fluido en reposo

A lo largo de los contornos verticales aguas arriba y aguas abajo se considera siempre que la tensión tangencial es nula, mientras que en el fondo sólo se asume deslizamiento perfecto para el caso de un fluido no viscoso y para fluidos viscosos se impone una velocidad nula en el fondo. En la dirección horizontal se toman 41 elementos de longitud unitaria, mientras que verticalmente, dependiendo del problema analizado, se consideran tres, cinco o siete capas de elementos, véase la Figura 18.

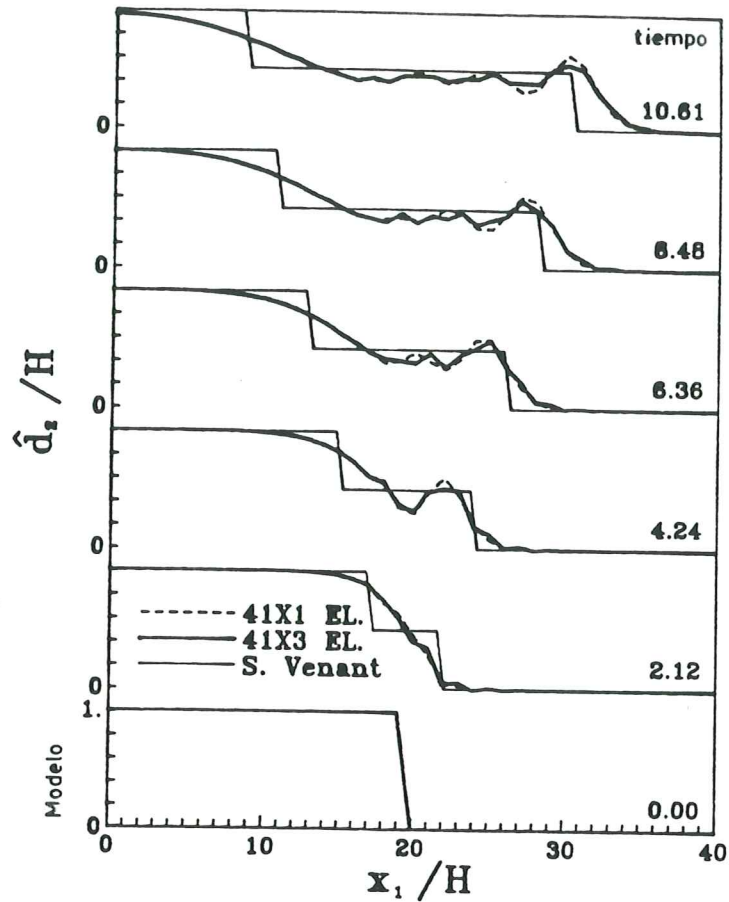


FIGURA 19. Comparaciones entre teoría de aguas poco profundas y la Formulación Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana para dos discretizaciones (FFR)

Ambos métodos para la actualización de la malla, i.e. matriz de Euler-Lagrange y formulación mixta, coinciden en este análisis puesto que horizontalmente se impone una descripción Euleriana. En cambio, a lo largo de la superficie libre, se utiliza una descripción Lagrangiana en la dirección vertical para poder seguir su movimiento; mientras que en el resto del fluido se emplea un punto de vista Euleriano para la componente vertical.

De una forma similar a Löhner et al. (1984), el análisis con un fluido perfecto se realiza con  $\Delta H = H = 1$ . La Figura 19 compara los resultados numéricos obtenidos para una y tres capas de elementos con la solución aproximada de aguas poco profundas. Obsérvese como la integración global de las ecuaciones de Navier-Stokes alisa la onda y disminuye su velocidad en los primeros instantes del movimiento (recuérdese que las ecuaciones de Saint Venant predicen una velocidad constante,  $\sqrt{gH}$ , desde  $t = 0$ ). No se observan diferencias importantes entre las dos discretizaciones (i.e. uno y tres elementos en profundidad); ambas muestran un alisamiento de la depresión



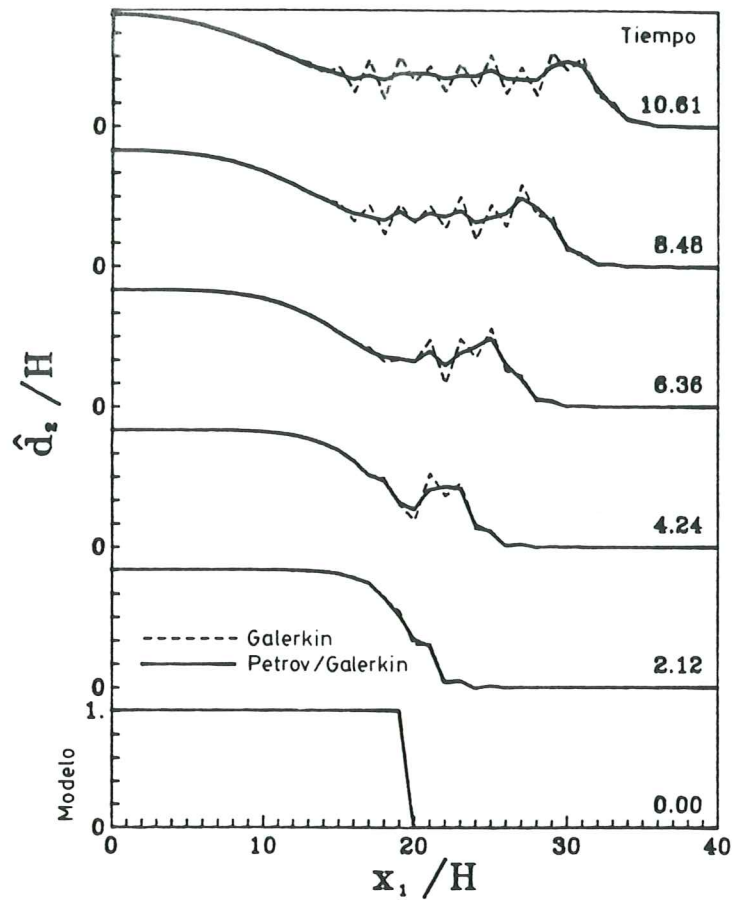


FIGURA 20. Influencia de la formulación de Petrov/Galerkin ponderada a contracorriente en la ecuación de actualización de la malla

aguas arriba de la ola y un pico claro en el frente. El pico se cree producido por el cambio brusco en la componente vertical de la velocidad material al paso del frente, en vez de estar generado exclusivamente por oscilaciones numéricas. Donde sí se pueden observar claramente oscilaciones numéricas nodo a nodo es en la Figura 20, en la que se compara una formulación clásica de Galerkin para la ecuación de actualización de la malla, con la formulación de Petrov-Galerkin (i.e. la solución previa de  $41 \times 3$  elementos). Se ha seleccionado para perturbar las funciones de peso el criterio temporal (Hughes y Tezduyar, 1984) y, como era de esperar (Hughes y Tezduyar, 1984; Hughes y Mallet, 1986), se obtienen mejores resultados si el número de Courant se toma igual a uno. En este problema de rotura de la presa con flujo sobre fluido en reposo, se ha implementado el método de Newmark de segundo orden, ver por ejemplo Hughes y Liu (1978), (i.e.  $\gamma = 0.5$ , y  $\beta = 0.25$ ), mientras que en los análisis restantes es necesario cierto amortiguamiento numérico (i.e.  $\gamma > 0.5$ ) debido a los reducidos valores de  $\Delta H$ ; estas inestabilidades numéricas se discuten más adelante.



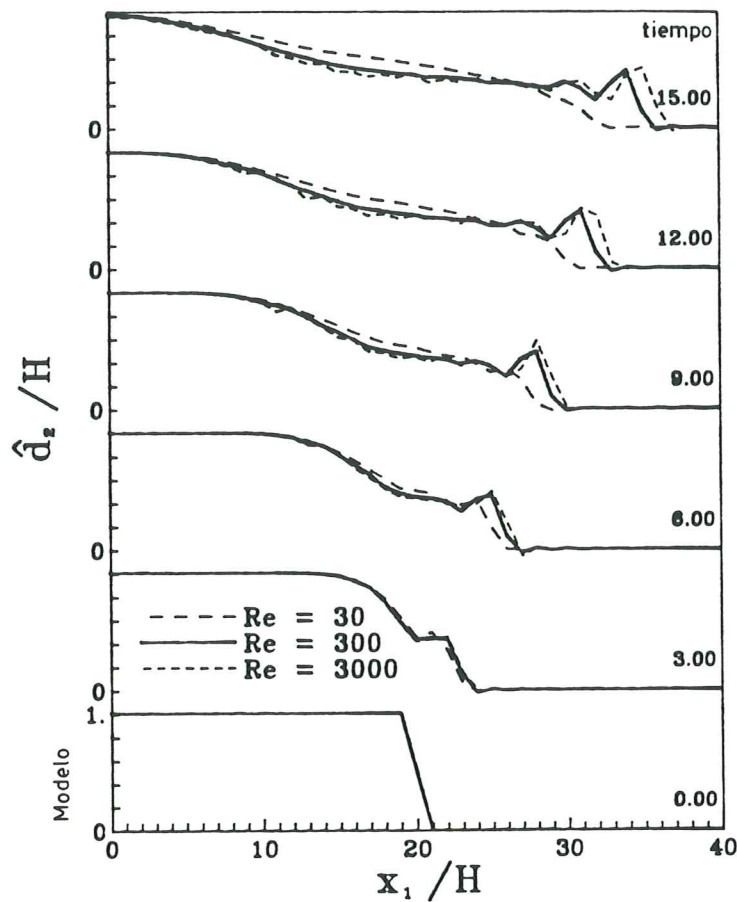


FIGURA 21. Resultados de un análisis de FFR para tres números de Reynolds

Para los estudios con fluidos viscosos se define un caso de referencia utilizando valores similares a los de Jeyapalan (1980). La altura de la presa se toma de  $H = 15$  m; la pendiente de 2:1; la densidad de  $\rho = 1600$  kg/m<sup>3</sup>; y puesto que la viscosidad varía entre  $1 \times 10^2$  Pa·s y  $1 \times 10^4$  Pa·s, se define el valor medio de  $1 \times 10^3$  Pa·s; dadas estas dimensiones, el número de Reynolds de referencia es de 300; finalmente se elige como profundidad del fluido en reposo aguas abajo de la presa un 25% de la profundidad total del depósito puesto que el caso límite de flujo sobre fondo seco se estudia en el siguiente apartado.

La Figura 21 presenta la influencia del número de Reynolds. Es importante observar el efecto que la disipación de energía viscosa tiene en la velocidad de la ola (menor que en el caso no viscoso), y en las oscilaciones de la superficie libre. Para un número de Reynolds de 30 el alisamiento de la superficie libre y la disminución de velocidad del frente por la pérdida de energía en efectos viscosos son evidentes; mientras que para  $Re = 3000$ , que es un valor extremadamente alto, al estar todo el cizallamiento reducido a la pequeña

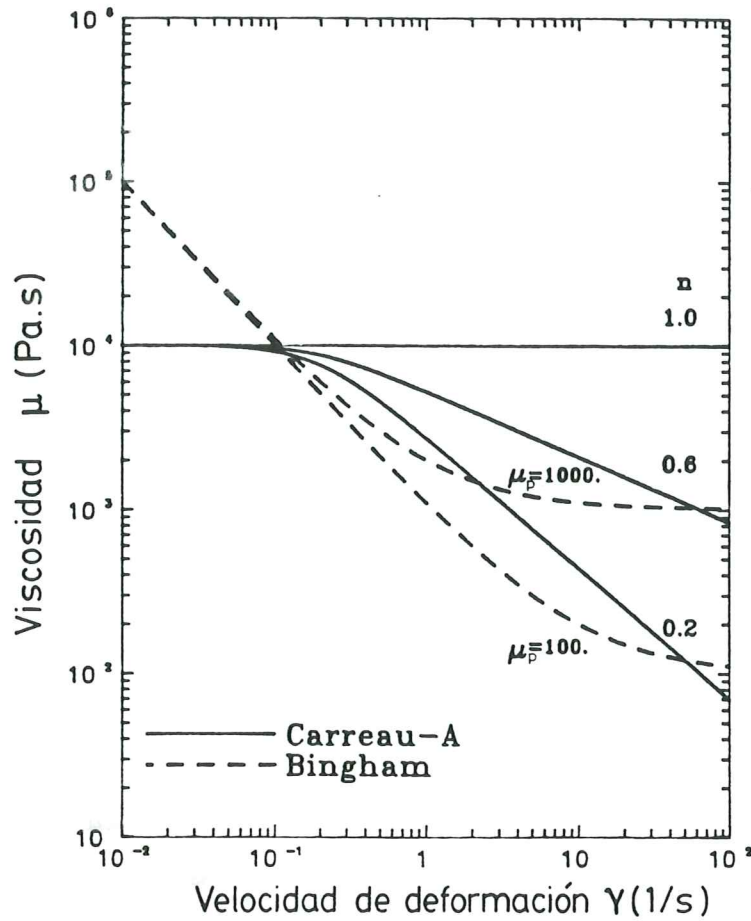


FIGURA 22. Viscosidad en función de la velocidad de deformación para los modelos de Carreau-A y Bingham en los casos estudiados

capa límite, los desplazamientos de la superficie son más próximos a los del caso de referencia o más aún a los del análisis no viscoso. Para este último análisis hacen falta siete capas de elementos para poder capturar las variaciones de la velocidad en profundidad.

Seguidamente se estudian algunos casos con fluidos no Newtonianos. Para evitar comparaciones con un excesivo número de parámetros, los ejemplos que se presentan se han realizado con el modelo de Carreau-A y el de Bingham que son simplificaciones del modelo de Carreau y del de Herschel-Bulkley, respectivamente (ver la Tabla 1). El modelo de Bingham se transforma en realidad en uno biviscoso con una viscosidad inicial extremadamente elevada debido a la imposibilidad numérica de prescribir viscosidades infinitas; esta transformación es ya clásica y puede encontrarse por ejemplo en O'Donovan y Tanner (1984) y Keentok et al. (1985). Las ecuaciones unidimensionales para el modelo de Carreau-A y el de Bingham son, respectivamente,

$$\mu = \mu_0 [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} \quad (65)$$

y

$$\mu = \begin{cases} 1000 \mu_p & \text{si } \tau \leq \tau_0 \\ \mu_p + \tau_0 / \dot{\gamma} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (66)$$

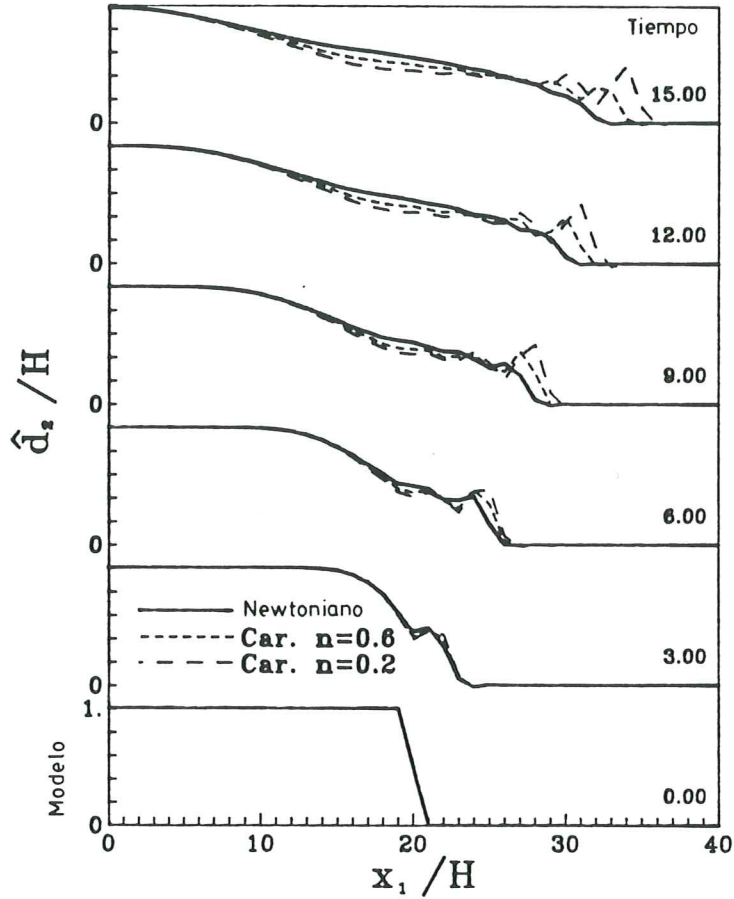


FIGURA 23. Análisis de FFR para un material no-Newtoniano: modelo de Carreau

donde  $\mu$ ,  $\dot{\gamma}$ , y  $\tau$  son la viscosidad absoluta, la velocidad de deformación angular, y la tensión tangencial, respectivamente;  $\mu_0$ ,  $\lambda$ , y  $n$  son la viscosidad en el origen, una constante temporal, y el coeficiente adimensional de la potencia para el modelo de Carreau-A; y  $\mu_p$  y  $\tau_0$  son la viscosidad plástica y la tensión de cedencia para el modelo de Bingham. La ecuación (65) se ha representado en la Figura 22 para  $\mu_0 = 1 \times 10^4$  Pa·s (cota inferior del rango de viscosidades de interés),  $\lambda = 5$  s, y tres valores de la constante  $n$ . Para  $n = 1.0$  el comportamiento es Newtoniano y al disminuir  $n$  aumenta la pseudoplasticidad del material. Puesto que no se ha encontrado ningún fluido que exhibiera más pseudoplasticidad que la correspondiente a  $n = 0.2$  (Tangy et al., 1984), se ha tomado este valor límite, el caso Newtoniano

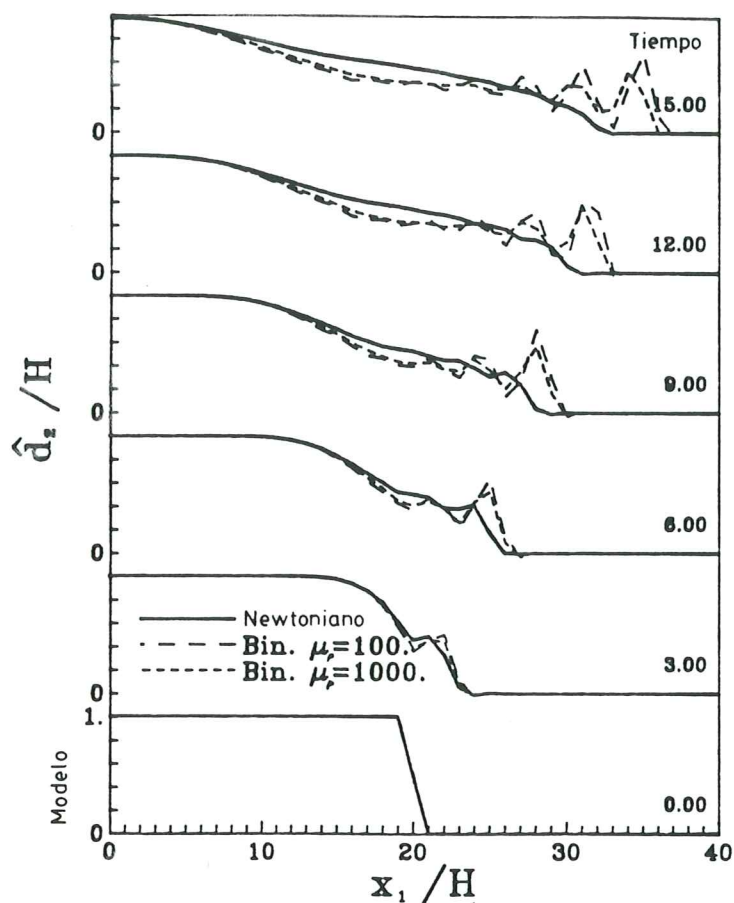


FIGURA 24. Análisis de FFR para un material no-Newtoniano: modelo de Bingham

y uno intermedio para estudiar la influencia de la pseudoplasticidad. En la Figura 22 también se representan las curvas correspondientes a los modelos de Bingham analizados; en los dos casos, la tensión de cedencia es de  $1 \times 10^3$  Pa, mientras que la viscosidad plástica es  $1 \times 10^2$  Pa·s ó  $1 \times 10^3$  Pa·s; de hecho los parámetros  $\tau_0 = 1 \times 10^3$  Pa y  $\mu_p = 1 \times 10^3$  Pa·s son los que empleó Jeyapalan (1980) para su caso de referencia.

Las superficies calculadas para diferentes instantes, correspondientes a los modelos citados anteriormente, se representan en las Figuras 23 y 24. Es importante observar que los resultados obtenidos con el modelo de Carreau-A para  $n = 0.2$  son muy similares al caso Newtoniano de  $Re = 300$ , mientras que para el modelo de Bingham con  $\mu_p = 1 \times 10^2$  Pa·s las superficies libres son parecidas a las de  $Re = 3000$ ; esto era previsible porque el rango de velocidad de deformación angular es de 0 a 20-30  $s^{-1}$ . También conviene remarcar que para ambos fluidos de Bingham las oscilaciones de la superficie libre son superiores a todos los demás modelos viscosos implementados, y que aún en el caso de  $\mu_p = 1 \times 10^3$  Pa·s la avenida se mueve a mayor velocidad



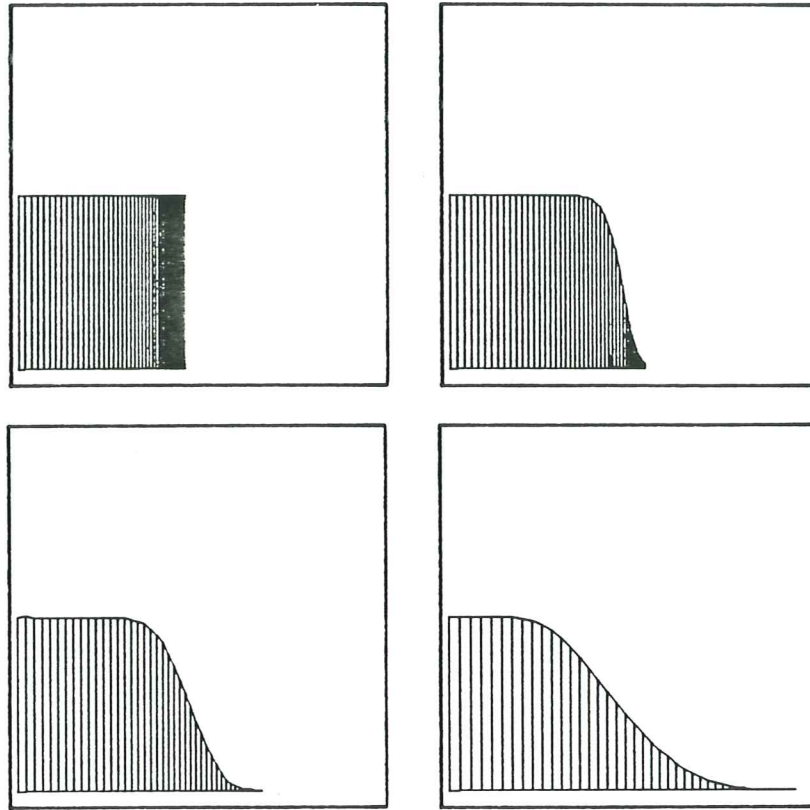


FIGURA 25. Malla de elementos finitos en movimiento para el análisis de FFS, (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 2$ , (c)  $t = 5$  y (d)  $t = 8$

que en los modelo de Carreau-A. Dos razones fundamentales pueden ser las causas de este comportamiento; primero, a menos que se usen incrementos de tiempo excesivamente ineconómicos, en las zonas en que el fluido se encuentra en reposo, aparecen oscilaciones debidas al valor, extremadamente elevado, de la viscosidad inicial ( $1000\mu_p$ ); y segundo, las mayores velocidades de deformación angular ocurren debajo del frente de la ola, y es precisamente en este punto donde la viscosidad se reduce de golpe en, al menos, dos órdenes de magnitud creando oscilaciones numéricas. Este comportamiento también está presente en el problema de flujo sobre fondo seco (FFS).

### Flujo sobre fondo seco

En el análisis de FFS sólo la condición de contorno aguas abajo difiere del problema de FFR. Este contorno se idealiza como una superficie material vertical de profundidad variable con una velocidad material horizontal constante a lo largo de toda la altura; para flujos viscosos se prescribe una velocidad nula en el fondo. La interpretación física de esta condición de contorno es que el flujo empuja una pared vertical sin rozamiento que no tiene masa ni se opone al movimiento del fluido.

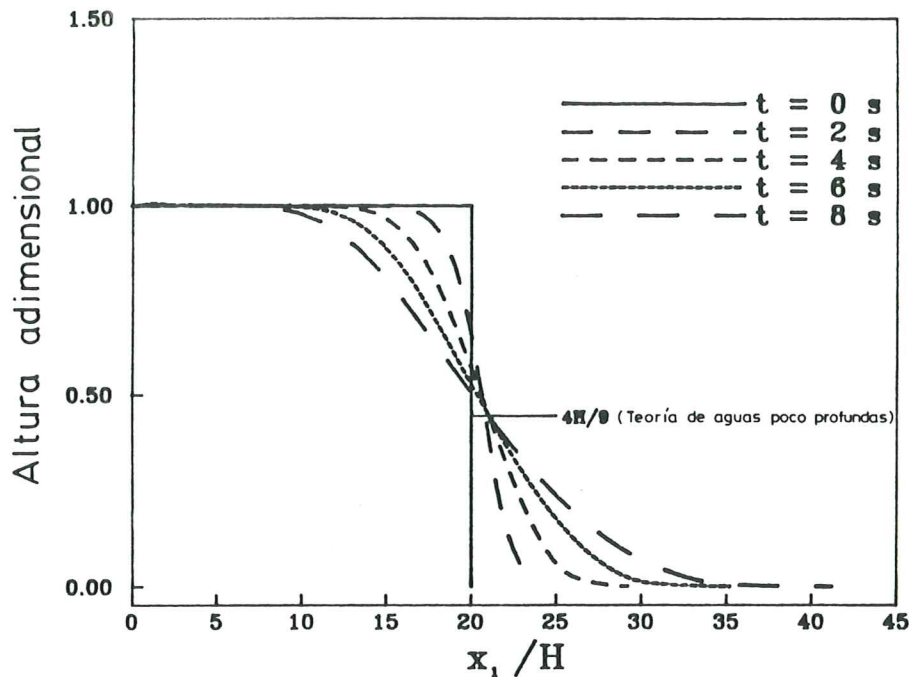


FIGURA 26. Posiciones de la superficie libre en diferentes instantes

La Figura 25 muestra la malla de elementos finitos, para un solo elemento en profundidad, en diferentes instantes del flujo de un fluido no viscoso. Nótese el corte vertical en el frente en  $t = 2$  s, también es importante observar que los elementos no sólo siguen el movimiento vertical de la superficie libre sino que se trasladan en la dirección horizontal para mantener formas y tamaños razonables. Por lo tanto en este análisis, al existir un movimiento en las dos direcciones del espacio, sólo se puede utilizar la formulación mixta para el remallado. La descripción Lagrangiana se emplea para el desplazamiento vertical de la superficie libre y para el movimiento horizontal del frente de la avenida. El resto de los nodos se trasladan horizontalmente con una velocidad de malla que varía linealmente entre cero en el contorno aguas arriba y la velocidad del frente en el contorno de aguas abajo. Cuando se implementan más elementos en profundidad, el movimiento vertical de los nodos interiores se define de la siguiente manera: en el frente, la velocidad vertical de la malla ( $\hat{v}_2$ ) varía linealmente con la profundidad; en los nodos del contorno aguas arriba se puede utilizar la misma  $\hat{v}_2$  que en el frente si se quiere mantener la forma rectangular de los elementos interiores y concentrar el número de nodos en la capa límite, o bien, se puede reducir  $\hat{v}_2$  al aumentar la distancia al frente para evitar elementos demasiado pequeños en el contorno aguas arriba (ver la Figura 29).

La teoría de aguas poco profundas predice una superficie libre de forma parabólica, una velocidad del frente de  $2\sqrt{gH}$ , y una variación lineal de la velocidad desde el frente hasta la parte posterior de la ola. La Figura

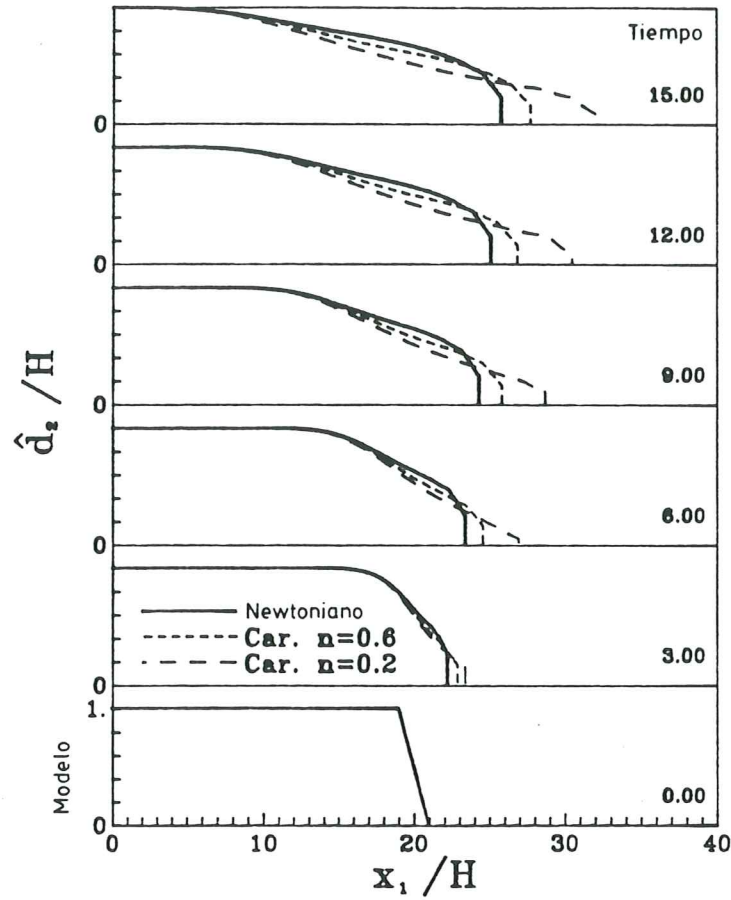


FIGURA 27. Análisis de FFS para un material no-Newtoniano: modelo de Carreau

26 muestra las superficies calculadas con el presente método; como se puede observar, todas ellas tienen, excepto en la cola de la ola, formas muy próximas a parábolas y pasados los dos primeros segundos del movimiento, todas estas superficies se cortan en un punto cuya altura coincide con la calculada por Ritter. Pero esta intersección de superficies está ligeramente trasladada y la velocidad de la avenida tiende a  $3\sqrt{gH}$ , en vez de  $2\sqrt{gH}$ . Estas dos diferencias entre ambos métodos, i.e. la traslación y la velocidad del frente, son debidas a la aceleración del frente en los primeros instantes del flujo. Pasados 1.5 s, la solución se estabiliza y se aproxima al estado estacionario. Recuérdese que la teoría de aguas poco profundas predice una aceleración infinita en  $t = 0$  y cero en cualquier otro instante. Obviamente, esta aceleración inicial es la causa de la variación del volumen y la velocidad final del frente; además, las oscilaciones de la aceleración, en los primeros instantes, al partir de un estado sin equilibrio, dependen del tamaño del elemento y del incremento de tiempo. En cualquier caso, si la solución de Ritter (1892) en  $t = \epsilon$  s (para  $\epsilon$  pequeño) se utiliza como condición inicial, no se observan cambios de volumen y la velocidad del frente permanece

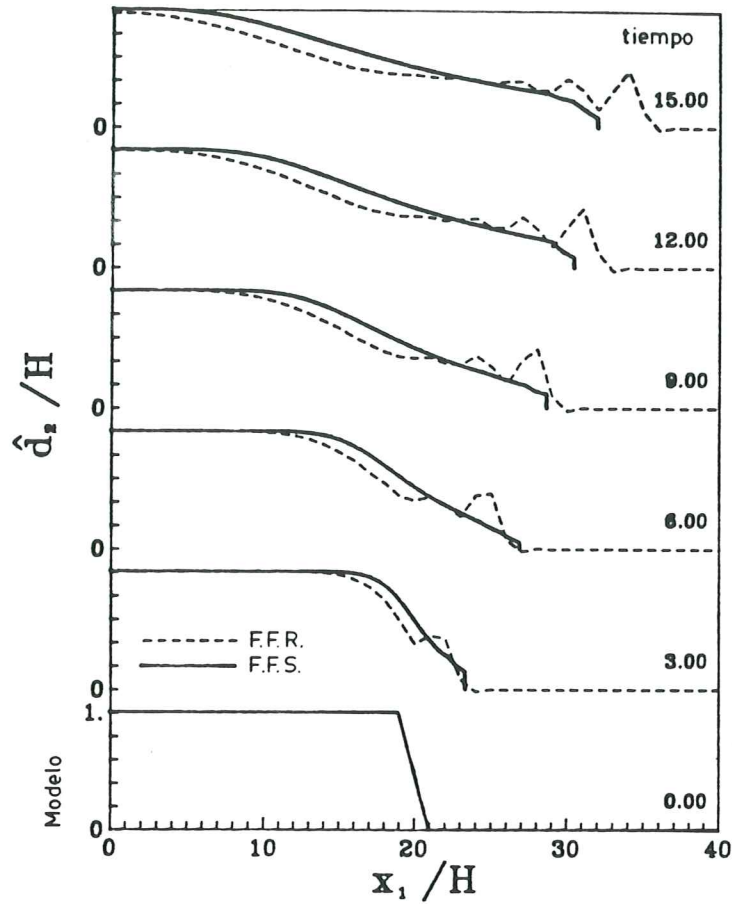


FIGURA 28. Comparación entre superficies libres para el análisis de Flujo sobre Fluido en Reposo, FFR, y Flujo sobre Fondo Seco, FFS, para un fluido de Carreau ( $n = 0.2$ )

constante en  $2\sqrt{gH}$ .

Para el análisis viscoso del problema de FFS, se estudia el flujo con los fluidos no Newtonianos implementados anteriormente (ver la Figura 22). La Figura 27 muestra la superficie libre para los tres modelos de Carreau, y la Figura 28 compara el resultado de los problemas de FFR y de FFS para  $n = 0.2$ , mientras que la Figura 29 presenta, para el citado fluido, la malla de elementos en cuatro instantes del flujo. Como era de esperar, en el problema de FFS la disipación de energía es mayor, y por lo tanto la velocidad de la onda menor, que en el análisis de FFR. Obsérvese también, que las oscilaciones de la superficie libre han desaparecido casi por completo; esto es debido a que en el problema de FFS, el transporte es fundamentalmente horizontal, mientras que en un FFR el movimiento vertical de masa fluida al paso de la ola es muy importante.

Para los modelos de Bingham sólo el caso de referencia estudiado por Jeyapalan (1980) (i.e.  $\tau_0 = 1 \times 10^3$  Pa y  $\mu_p = 1 \times 10^3$  Pa·s) tiene una



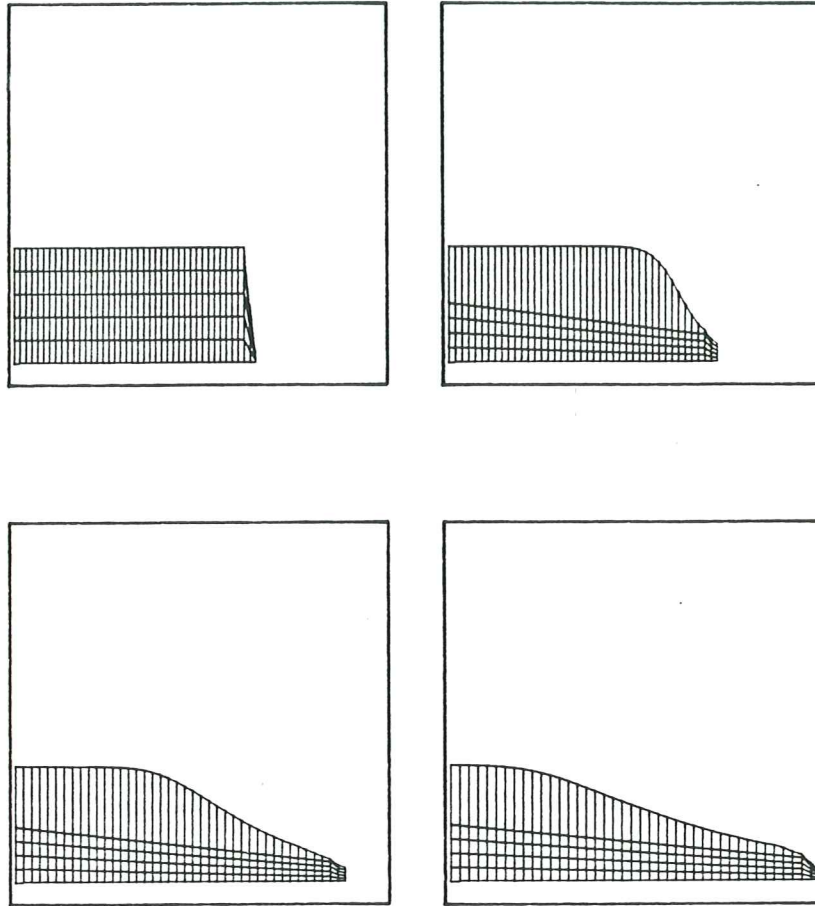


FIGURA 29. Malla de elementos finitos en movimiento para un análisis de FFS con un fluido de Carreau, (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 3$ , (c)  $t = 9$  y (d)  $t = 15$

solución estable, en cambio para  $\mu_p = 1 \times 10^2$  Pa·s las inestabilidades numéricas de la velocidad del frente producen el colapso de los elementos. Estas inestabilidades, que quedan amortiguadas para números de Reynolds medios o bajos, son debidas a la particular condición de contorno prescrita aguas abajo. A lo largo del frente se imponen todas las velocidades horizontales iguales; esto introduce una distribución de velocidades irreal que no concuerda con la distribución “natural” que se produce en la columna de nodos justo aguas arriba del frente. Consecuentemente, la velocidad horizontal del frente empieza a oscilar para intentar adecuarse a la citada distribución “natural” de velocidades y estas oscilaciones inducen variaciones asociadas de la superficie libre en el último elemento (véase la Figura 30). La Figura 31 muestra la variación del desplazamiento horizontal del frente con el tiempo para los diferentes modelos no Newtonianos que se estudian.

Finalmente, se predicen los resultados experimentales de Jeyapalan (1980) con el modelo propuesto. El citado autor ha realizado diversos ensayos

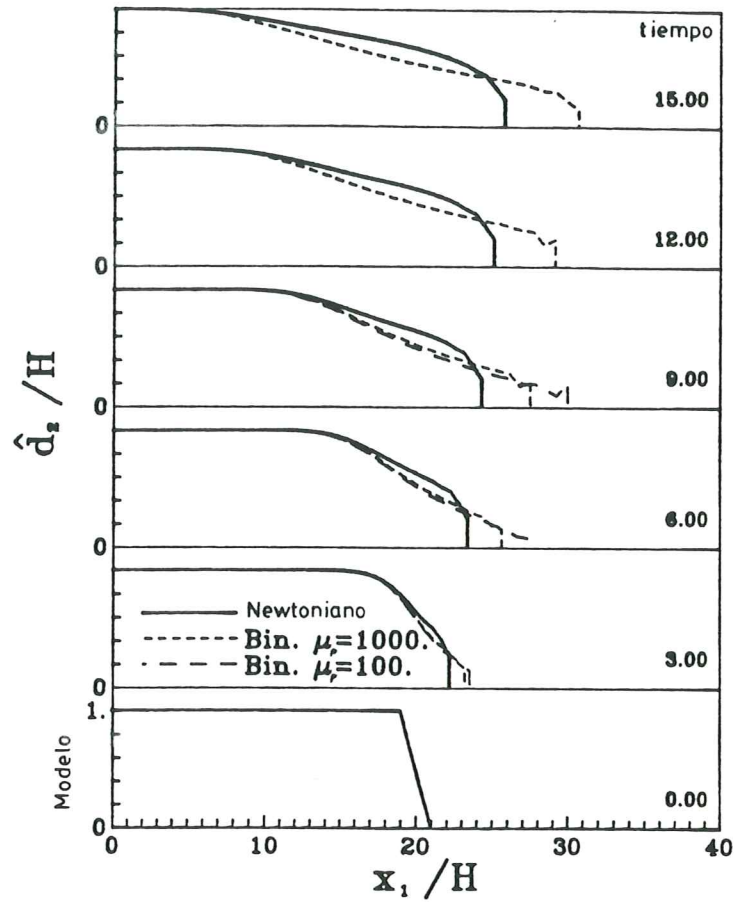


FIGURA 30. Análisis de FFS para un material no-Newtoniano: modelo de Bingham

de laboratorio donde se simula la rotura de un depósito, de 0.1524 m de profundidad por  $4H$  de largo, con un aceite de viscosidad constante  $\mu = 3.9$  Pa·s y una densidad  $\rho = 897.05$  kg/m<sup>3</sup>. Las predicciones que emplean tres mallas de elementos finitos diferentes, se muestran en la Figura 32. La sobrevaloración de los desplazamientos se debe a dos razones fundamentales: (i) la idealización del muro vertical aguas arriba como un contorno sin rozamiento (i.e. tensión tangencial nula) no es exacta para fluidos viscosos, (ii) en los instantes iniciales del flujo las aceleraciones son extremadamente altas, oscilan y dependen del tamaño de los elementos, consecuentemente para cada discretización la velocidad máxima del frente en estos primeros instantes varía (ver Figura 32b) y por lo tanto produce una rotación (i.e. variación de la pendiente) de la curva de desplazamientos cerca del origen. Al aumentar suficientemente el número de elementos en profundidad, se disminuyen las oscilaciones iniciales y se puede observar una mejor predicción de los resultados.

Es obvio que el método de los elementos finitos con una formulación ALE no

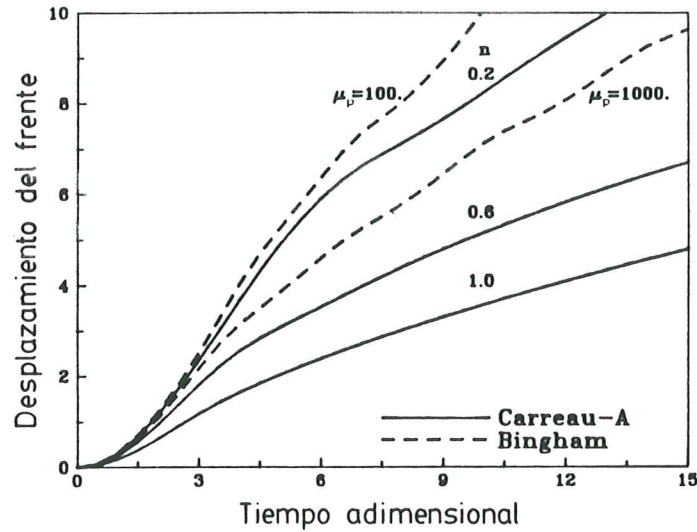


FIGURA 31. Desplazamiento horizontal del frente de la avenida con respecto al tiempo para los diferentes modelos estudiados

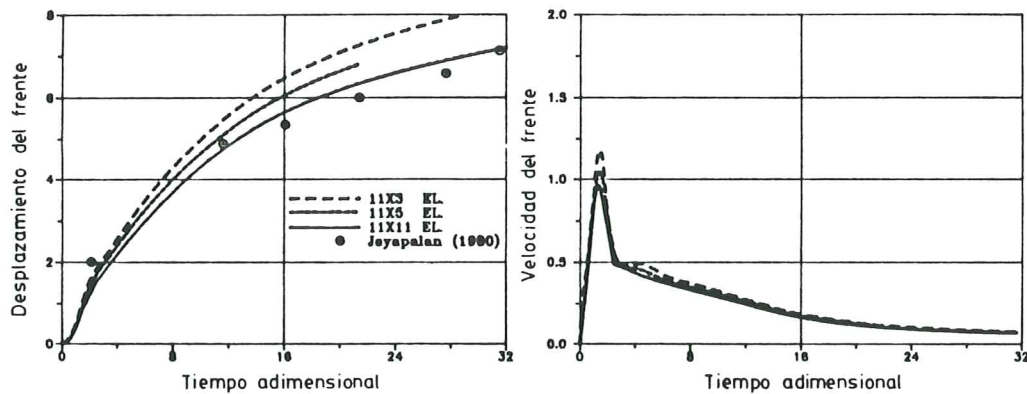


FIGURA 32. Comparación de las predicciones numéricas con los resultados experimentales de Jeyapalan (1980), (a) desplazamientos del frente, (b) velocidad del frente

resuelve de modo definitivo el problema de la rotura de una presa; pero se ha realizado un gran progreso al (i) conseguir la integración global de la ecuación de equilibrio en todo el dominio, lo que permite implementar modelos constitutivos relativamente sofisticados, (ii) permitir el movimiento del dominio con las nuevas y mejoradas técnicas de remallado, y (iii) incorporar técnicas de ponderación a contra corriente no sólo en las ecuaciones del movimiento sino que también en las del contorno. Evidentemente, el considerable esfuerzo que la comunidad científica sigue realizando hoy en día en el campo de la discretización de las ecuaciones dominadas por procesos convectivos es absolutamente necesario; y para el caso del problema de la rotura de la presa, es necesario mejorar la descripción de las condiciones



iniciales y de la condición de contorno aguas abajo.

### 7.5.- Chapoteo de gran amplitud

La complejidad de los problemas sísmicos de interacción fluido estructura se ve muchas veces acentuada por el movimiento de la superficie libre, en particular cuando se estudia el chapoteo de tanques de almacenamiento de fluidos, depósitos subterráneos de combustible y o reactores nucleares. En estos cálculos de interacción fluido estructura, la hipótesis de muros rígidos se implementa si se adopta una formulación desacoplada entre el fluido y la estructura (Zienkiewicz y Bettess, 1978; Ma et al., 1982; Belytschko y Liu, 1985; Liu y Gvildys, 1986) o cuando se estudia el desbordamiento de un depósito durante un sismo (Muto et al., 1985). Técnicas Lagrangianas de actualización, con ciertas modificaciones para evitar excesivas distorsiones de la malla (Ramaswamy et al., 1986), han sido implementadas pero, o bien las restricciones en los incrementos de tiempo son muy severas, o bien las amplitudes de las olas son pequeñas (aproximadamente un 1% de la profundidad del depósito). Aquí la descripción ALE se utiliza para analizar el chapoteo de gran amplitud (del orden de un 50% de la profundidad).

Se excita un depósito rígido bidimensional de profundidad  $D$  y ancho  $H$  con una aceleración horizontal

$$g_1 = Ag \sin(\omega t) \quad (67)$$

donde  $g$ ,  $\omega$ , y  $t$  son la aceleración de la gravedad, la pulsación, y el tiempo respectivamente, y  $A$  es una constante arbitraria que gobierna la amplitud de la excitación. Después de escalar el problema utilizando  $D$  como longitud característica, y  $\rho g D$  como presión característica, los parámetros adimensionales que gobiernan el flujo son

$$\alpha = D/W \quad ; \quad A \quad ; \quad \tilde{\omega} = \omega \sqrt{D/b} \quad ; \quad Re = D \sqrt{gD}/\nu \quad (68)$$

donde  $\alpha$  está asociado con la geometría,  $A$  y  $\tilde{\omega}$  son los parámetros que definen la excitación,  $Re$  es el número de Reynolds clásico, y  $\nu$  es la viscosidad cinemática.

Para comparar los resultados numéricos con los ensayos experimentales descritos en Muto et al. (1985) se prescriben los siguientes valores:  $D = 0.3$  m,  $W = 0.8$  m,  $A = 0.01$  (10 Gal) para el primer modo de vibración y 0.03 (30 Gal) para el tercero, y  $\mu = 1 \times 10^{-3}$  Pa·s (agua). Puesto que el agua en este problema se comporta casi como un fluido no viscoso, los contornos del depósito se suponen sin rozamiento. La discretización está compuesta por 441 ( $21 \times 21$ ) elementos cuadrangulares lineales de presión constante, por lo tanto hay 484 nodos. En la ecuación de equilibrio se emplea la formulación de Petrov-Galerkin. A lo largo de la superficie libre y en la dirección vertical



la descripción es Lagrangiana, mientras que en los elementos interiores la componente vertical de la velocidad de la malla varía linealmente con la profundidad. Horizontalmente, se utiliza la descripción Euleriana en todo el dominio. El incremento de tiempo para el primer modo de chapoteo se toma igual a  $\pi/30$ , i.e. 60 incrementos de tiempo por ciclo si la frecuencia de vibración es de 0.91 Hz.

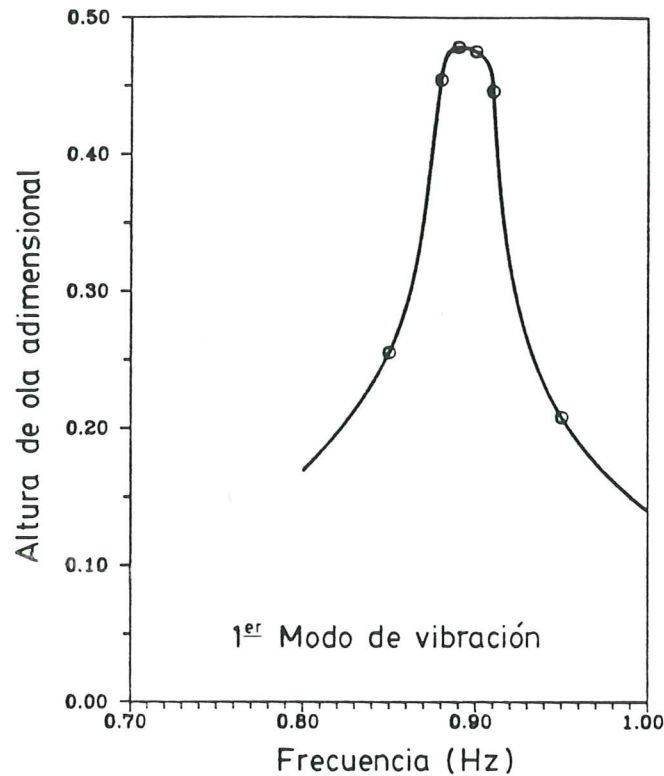


FIGURA 33. Variación de la altura máxima de la ola con respecto a la frecuencia

Al finalizar el décimo ciclo se mide la altura de ola máxima, la Figura 33 muestra como varía esta altura con la frecuencia. La frecuencia de resonancia obtenida ( $0.89 \pm 0.01$  Hz) se compara favorablemente a los resultados citados en Muto et al. (1985): análisis experimental (0.88 Hz), análisis por elementos finitos (0.898 Hz), y la teoría de Houssner (0.902 Hz). La Figura 34 muestra dos configuraciones instantáneas del dominio y de las líneas de corriente; es importante observar el movimiento vertical de la superficie libre en el centro del tanque donde la componente vertical de la velocidad material es siempre nula. Este mismo fenómeno puede observarse en la Figura 35 donde, para un mismo ciclo, se ha representado la superficie libre en doce instantes diferentes; Muto et al. (1985) muestran gráficos muy similares obtenidos al fotografiar el movimiento del líquido con un velocidad de obturación lenta.

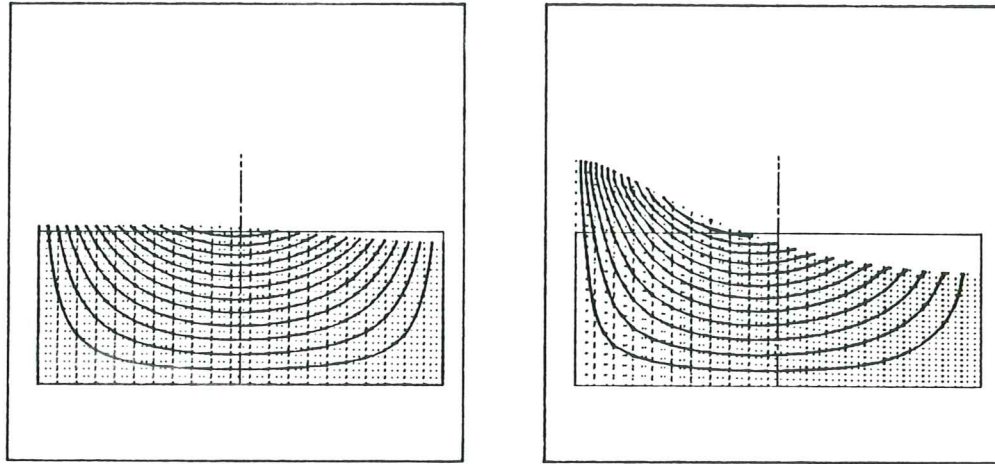


FIGURA 34. Configuraciones instantáneas del dominio fluido y líneas de corrientes para el primer modo de vibración (a)  $wt = n.2\pi - \frac{\pi}{2}$  y (b)  $wt = n.2\pi$

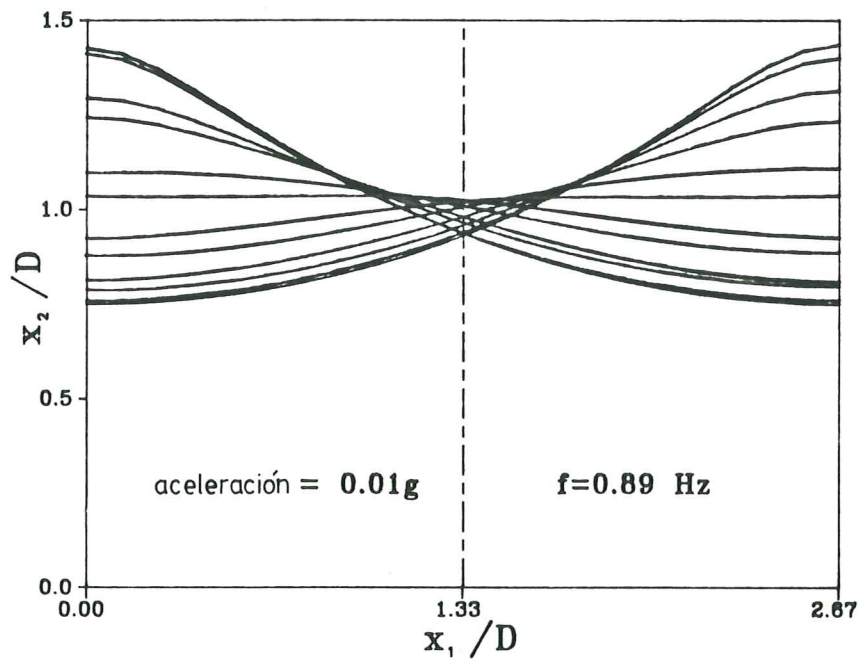


FIGURA 35. Posiciones de la superficie libre durante un ciclo. Primer modo de vibración

La no linealidad en el comportamiento de la superficie libre es debida a la componente convectiva de la ecuación de actualización de la malla y puede ser observada de nuevo en la Figura 36 donde se representa el desplazamiento vertical de la ola junto a los muros del depósito. Obsérvese que los nodos a ambos lados del tanque tienen una diferencia de fase de un ciclo y que la amplitud de la ola en estos puntos, aunque periódica, no es simétrica con

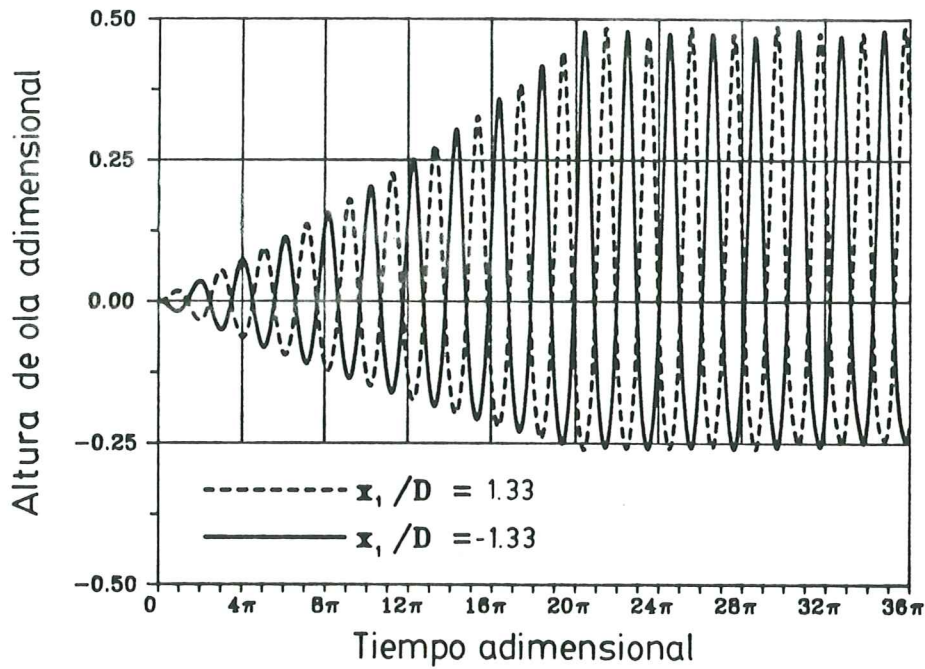


FIGURA 36. Historia de las oscilaciones de la superficie libre en los lados del tanque

respecto al nivel inicial del líquido (i.e. la ola sube más que baja). Esta última figura corresponde a vibrar el sistema a la frecuencia de resonancia durante diez ciclos, y luego dejar que el fluido oscile libremente. Como era de esperar no se observa casi amortiguamiento, puesto que la viscosidad del agua es muy pequeña, la formulación de Petrov-Galerkin que se emplea aquí no sobre amortigua la solución, y los muros se suponen sin rozamiento.

Finalmente se estudia el tercer modo de vibración imponiendo una la frecuencia empírica (1.67 Hz) obtenida por Muto et al. (1985). Se toman sesenta incrementos de tiempo por ciclo, quince ciclos, y una aceleración de excitación tres veces mayor que en el análisis del primer modo.

La Figura 37 muestra dos configuraciones instantáneas; obsérvese que en  $\omega t = n2\pi$  (con  $n$  entero) se visualizan claramente unos vórtices y la amplitud de la ola en los extremos vuelve a ser máxima, mientras que en  $\omega t = n2\pi - \pi/2$  la distribución de líneas de corriente es simétrica y las amplitudes de las velocidades son máximas. Esta figura visualiza claramente la conclusión de Muto et al. (1985) de que hay un menor movimiento de agua en la mitad inferior del depósito para el tercer modo de chapoteo. La Figura 38 muestra para el décimoquinto ciclo doce instantes diferentes de la superficie libre; y de nuevo, el tratamiento no lineal de la superficie libre explica la traslación vertical de los puntos que poseen componentes verticales de la velocidad nulas. La excelente concordancia entre los resultados experimentales y los del modelo numérico, indica que la formulación ALE que aquí se presenta,

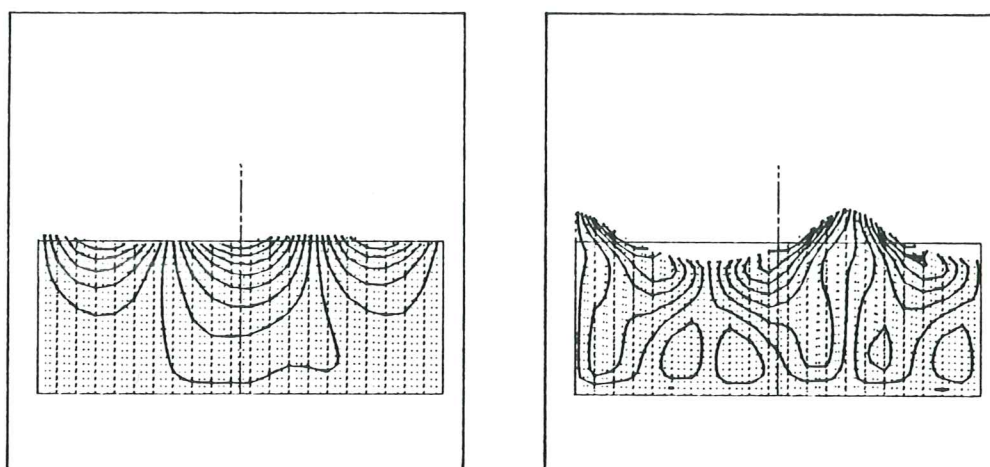


FIGURA 37. Configuraciones instantáneas del dominio fluido y líneas de corrientes para el tercer modo de vibración

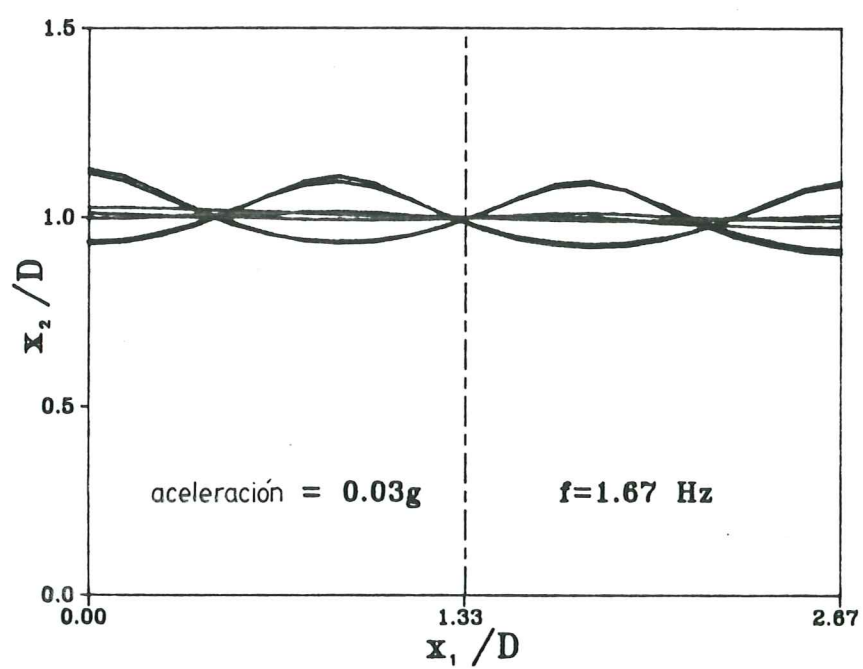


FIGURA 38. Posiciones de la superficie libre durante un ciclo. Tercer modo de vibración

puede emplearse en estudios de interacción fluido estructura con grandes movimientos del contorno.



## 8.- CONCLUSIONES

Este trabajo ilustra la aplicación de técnicas Arbitrariamente Lagrangianas-Eulerianas a flujos viscosos con superficie libre. Este programa se ha implementado en un ordenador personal gracias al uso de una formulación mixta presión-velocidad y a la eficacia de la formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente. Además, se han desarrollado varios métodos de actualización de la malla, incluyendo una nueva formulación mixta que permite transformar el dominio espacial deformado al dominio referencial de una forma mucho más racional. Una particularidad de los métodos que se han presentado es la inclusión de la formulación de Petrov-Galerkin ponderada a contracorriente en las ecuaciones de actualización de la malla. Se han obtenido claros progresos en la modelización del Tsunami, chapoteo de gran amplitud y la avenida producida por rotura de una presa. En este último problema se ha incorporado también el comportamiento no Newtoniano del material. En conclusión el método ALE permite estudiar grandes movimientos del contorno de una forma mucho más exacta y eficaz que las clásicas descripciones Euleriana y Lagrangiana.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en su mayor parte durante la estancia del autor en Northwestern University, Evanston, Illinois; por lo tanto desea expresar la gratitud a dicha universidad y a los diferentes grupos de trabajo que permitieron llevar a buen término esta investigación.

Es imperativo resaltar la labor del profesor Wing Kam Liu que ayudó y supervisó al autor en todos los temas relativos a elementos finitos y técnicas ALE. Así mismo, hay que notar que las sugerencias del profesor Fermín Navarrina durante la elaboración de este artículo han sido extremadamente valiosas y auguran futuros desarrollos y aplicaciones de esta línea de investigación.

Finalmente el autor agradece la ayuda económica de la CIRIT (Generalitat de Catalunya) y de Northwestern University (premio Royal E. Cabell).

## REFERENCIAS

- Belytschko, T., and Kennedy, J.M. (1978), "Computer Models for Subassembly Simulation", *Nuclear Engineering Design*, Volume 49, pp. 17-38.
- Belytschko, T., Kennedy, J.M. and Schoeberie, D.F. (1980), "Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid Structure Interaction", *Journal of Pressure Vessel Technology*, American Society of Mechanical Engineers, Volume 102, pp. 62-69.

- Bird, R.B., Armstrong, R.C., and Hassager, O. (1977), *Dynamics of Polymeric Liquids, Volume 1: Fluid Mechanics*, John Wiley and Sons, 458 pages.
- Brugnot, G., and Pochet, R. (1981), "Numerical Simulation Study of Avalanches", *Journal of Glaciology*, Volume 27, Number 95, pp. 77-88.
- Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R. (1982), "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 32, pp. 199-259.
- Carey, G.F., and Oden, J.T. (1986), *Finite Elements: Fluids Mechanics*, Volume VI of the Texas Finite Element Series, Prentice Hall, 323 pages.
- Chen, C., and Armbruster, J.T. (1980), "Dam-Break Wave Model: Formulation and Verification", *Journal of the Hydraulics Division*, American Society of Civil Engineers, Volume 106, Number HY5, pp. 747-767.
- Donea, J. (1983), "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods", *Computational Methods for Transient Analysis*, Edited by T. Belytschko and T.J.R. Hughes, Elsevier Science Publishers, pp. 473-516.
- Donea, J. (1984), "A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 20, pp. 101-119.
- Donea, J., Fasoli-Stella, P., and Giuliani, S. (1977), "Lagrangian and Eulerian Finite Element Techniques for Transient Fluid Structure Interaction Problems", *Transactions of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Paper B1/2.
- Dressler, R.F. (1952), "Hydraulic Resistance Effect Upon Dam-Break Functions", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Volume 49, Number 3, pp. 217-225.
- Fritz, R.L. (1977), "The Effects of Liquids in Dynamic Motions of Immersed Fluids", *Journal of Engineering for Industry*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Volume 94, pp. 167-173.
- Goring, D.G. (1978), *Tsunamis—The Propagation of Long Waves onto a Shelf*, Dissertation submitted to the California Institute of Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 337 pages.
- Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C. and Mitchell, A.R. (1977), "An Upwind Finite Element Scheme For Two-Dimensional Convective Transport", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 11, pp. 131-145.
- Heinrich, J.C., and Zienkiewicz, O.C. (1979), "The Finite Element Method and "Upwinding" Techniques in the Numerical Solution of Convection Dominated Flow Problems", in *Finite Elements for convection Dominated Flow*, Edited by T.H.R. Hughes, American Society of Mechanical Engineers, Volume 34, pp. 105-136.



- Hirt, C.W., Amsden, A.A., and Cook, J.L. (1974), "An Arbitrary Lagrangian Eulerian Computing Method for All Flow Speeds", *Journal of Computational Physics*, Volume 14, pp. 227-253.
- Huerta, A. (1987), Numerical Modeling of Slurry Mechanics Problems, Dissertation submitted to Northwestern University in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of Philosophy, 187 pages.
- Hughes, T.J.R. (1978), "A Simple Scheme for Developing Upwind Finite Elements", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Volume 12, pp. 1359-1365.
- Hughes, T.J.R., and Brooks, A.N. (1982), "A Theoretical Framework for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions: Application to the Streamline-Upwind Procedure", *Finite Elements in Fluids*, Edited by R.H. Gallagher et al, John Wiley and Sons Ltd., Volume 4, pp. 47-65.
- Hughes, T.J.R., and Liu, W.K. (1978), "Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis", *Journal of Applied Mechanics*, Volume 45, pp. 371-378.
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K., and Zimmerman, T.K. (1981), "Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 29, pp. 329-349.
- Hughes, T.J.R., and Mallet, M. (1986), "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: III. The Generalized Streamline Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 58, pp. 305-328.
- Hughes, T.J.R., and Tezduyar, T.E. (1984), "Finite Element Methods for First-Order Hyperbolic Systems with Particular Emphasis on the Compressible Euler Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 45, pp. 217-284.
- Hutter, K., and Vulliet, L. (1985), "Gravity-Driven Slow Creeping Flow of a Thermoviscous body at Elevated Temperatures", *Journal of Thermal Stresses*, Volume 8, pp. 99-138.
- Jeyapalan, J.K. (1980), Analysis of Flow Failures of Mine Tailings Impoundments, Dissertation submitted to the University of California, Berkeley, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 298 pages.
- Keentok, M., Milthorpe, J.F., and O'Donovan, E. (1985), "On the Shearing Zone Around Rotating Vanes in Plastic Liquids: Theory and Experiment", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Volume 17, pp. 23-35.
- Liu, W.K., Belytschko, T., and Chang, H. (1986), "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Path Dependent Materials", *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 58, pp. 227-246.
- Liu, W.K., and Chang, H.G. (1984), "Efficient Computational Procedures for Long Time Duration Fluid-Structure Interaction Problems", *Journal of Pressure Vessel Technology*, American Society of Mechanical Engineers, Volume 106, pp. 317-322.

- Liu, W.K., and Chang, H.G. (1985), "A Method of Computation for Fluid Structure Interaction", *Journal of Computers and Structures*, Volume 20, Number 1-3, pp. 311-320.
- Liu, W.K., Chang, H., Chen, J.S., and Belytschko, T. (1987), "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin Finite Elements for Nonlinear Continua", to appear in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Liu, W.K., and Gvildys, J. (1986), "Fluid Structure Interactions of Tanks with and Eccentric Core Barrel", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 58, pp. 51-57.
- Liu, W.K., Lam, D., and Belytschko, T. (1984), "Finite Element Method for Hydrodynamic Mass with Nonstationary Fluid", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 44, pp. 177-211.
- Liu, W.K., and Ma, D. (1982), "Computer Implementation Aspects for Fluid Structure Interaction Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 31, pp. 129-148.
- Löhner, R., Morgan, K., and Zienkiewicz, O.C. (1984), "The Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations Systems by the Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Volume 4, pp. 1043-1063.
- Malvern, L.E. (1965), *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Noh, W.F. (1964), "CEL: A Time-Dependent Two-Space-Dimensional Coupled Eulerian-Lagrangian Code", in *Methods in Computational Physics*, Volume 3, Edited by B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg, Academic Press, New York.
- O'Donovan, E.J., and Tanner, R.I. (1984), "Numerical Study of the Bingham Squeeze Film Problem", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Volume 15, pp. 75-83.
- Pattani, P.G. and Olson, M.D. (1987), "Periodic Solutions of Rigid Body-Viscous Flow Interaction", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Volume 7, Number 7&8, pp. 653-696.
- Ritchmyer, R.D., and Morton, K.W. (1967), *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience, New York, 2nd edition.
- Ritter, A. (1892), "Die Fortpflanzung der Wasserwelle", *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Volume 36, Number 33, pp. 947-954.
- Sakkas, J.G., and Strelkoff, T. (1976), "Dimensionless Solution of Dam-Break Flood Waves", *Journal of the Hydraulics Division*, American Society of Civil Engineers, Volume 102, Number HY2, pp. 171-184.
- Strelkoff, T. (1969), "One Dimensional Equations for Open Channel Flow", *Journal of the Hydraulics Division*, American Society of Civil Engineers, Volume 95, Number HY3, pp. 861-876.
- Tangy, P., Fortin, M., and Choplin, L. (1984), "Finite Element Simulation of Dip Coating, II: Non-Newtonian Fluids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Volume 4, pp. 459-475.



Whitham, G.B. (1955), "The Effects of Hydraulic Resistance in the Dam-Break Problem", *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, Volume 227, pp. 399-407.

## APENDICE A: CONSERVACION DE MASA Y MOMENTUM EN FORMA REFERENCIAL

### A.1 Conservación de masa (ecuación de continuidad)

El objetivo en esta sección es derivar el principio de conservación de masa en forma referencial. Considerese un volumen arbitrario  $V_\chi$  fijo en el dominio referencial,  $R_\chi$ , con un contorno  $\partial V_\chi$ ; el medio es continuo con una densidad  $\hat{\rho}(\chi, t)$ . Utilizando transformaciones de coordenadas clásicas entre el volumen  $V_\chi$  y su representación espacial,  $V_x$ , o material,  $V_X$ , se puede escribir que en el instante  $t$  la masa total en  $V_\chi$  es

$$M = \int_{V_\chi} \hat{\rho} d\Omega_\chi = \int_{V_x} \rho d\Omega_x = \int_{V_X} \rho^0 d\Omega_X \quad (A.1)$$

donde

$$\hat{\rho}(\chi, t) = \hat{J} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (A.2a)$$

$$\rho^0(\mathbf{X}, t_0) = J \rho(\mathbf{x}, t) \quad (A.2b)$$

$$\hat{J} = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} \right] \quad (A.2c)$$

$$J = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \quad (A.2d)$$

El principio de conservación de la masa establece que la velocidad de crecimiento *local* de la masa total contenida en el volumen de control,

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_\chi = \int_{V_\chi} \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_\chi d\Omega_\chi, \quad (A.3a)$$

debe ser igual, si no se crea o destruye materia en el interior de  $V_\chi$ , al flujo de masa a través del contorno  $\partial V_\chi$ , es decir

$$- \oint_{\partial V_\chi} \hat{\rho} \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_\chi. \quad (A.3b)$$

Por lo tanto,

$$\int_{V_\chi} \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_\chi d\Omega_\chi + \oint_{\partial V_\chi} \hat{\rho} \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_\chi = 0 \quad (A.4)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es la normal exterior unitaria a  $\partial V_\chi$ .

La ecuación anterior se puede deducir directamente de la Ec. (A.1) utilizando el siguiente razonamiento. La velocidad de crecimiento *total*

(i.e. derivada material) de la masa que en  $t_0$  contenía el volumen *material*  $V_X$ , y que en el instante  $t$  ocupa el volumen *referencial*  $V_\chi$ , debe ser zero. Consecuentemente, de la Ec. (A.1) se deduce:

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_{V_X} \rho^0 d\Omega_X = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_{V_\chi} \hat{\rho} d\Omega_\chi = 0 \quad (\text{A.5})$$

y aplicando el teorema de Reynolds en forma referencial, ver la Ec. (19), se obtiene de nuevo la Ec. (A.4)

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \int_{V_\chi} \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_{\chi} d\Omega_\chi + \oint_{\partial V_\chi} \hat{\rho} \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_\chi = 0 \quad (\text{A.4})$$

Utilizando ahora el teorema de la divergencia, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\int_{V_\chi} \left[ \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_{\chi} + \frac{\partial \hat{\rho} w_i}{\partial \chi_i} \right] d\Omega_\chi = 0 \quad (\text{A.6})$$

y puesto que la integral de la Ec. (A.6) se anula idénticamente para cualquier volumen  $V_\chi$  arbitrariamente escogido, el integrando debe ser nulo en todos los puntos del dominio referencial; por lo tanto se obtiene la ecuación de continuidad en forma referencial

$$\left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_{\chi} + \frac{\partial \hat{\rho} w_i}{\partial \chi_i} = 0 \quad \text{en } R_\chi \quad (\text{A.7})$$

Si se emplea la formulación Lagrangiana, la ecuación anterior se transforma utilizando

$$\chi = \mathbf{X} \quad ; \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad ; \quad \hat{J} = J = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \quad ; \quad \hat{\rho} = \rho^0 \quad (\text{A.8})$$

a

$$\left. \frac{\partial \rho J}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = 0 \quad \text{o bien} \quad \rho J = \rho^0 \quad \text{en } R_X \quad (\text{A.9})$$

En cambio, si se desea emplear una descripción Euleriana, se toma

$$\chi = \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} \quad ; \quad \hat{J} = 1 \quad ; \quad \hat{\rho} = \rho \quad (\text{A.10})$$

y

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } R_x \quad (\text{A.11})$$

donde las Ecs. (A.9) y (A.11) son las dos formas clásicas de presentar la ecuación de continuidad, ver Malvern (1965).

Hughes et al. (1981) utilizan una ecuación diferente que se puede obtener directamente de la Ec. (A.1) después de derivarla con respecto al tiempo, manteniendo  $\mathbf{X}$  fijo,

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_{V_x} \rho d\Omega_x = 0 \quad (A.12a)$$

y de aplicar el teorema del transporte de Reynolds clásico y el de la divergencia

$$\int_{V_x} \left[ \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right] d\Omega_x = 0 \quad (A.12b)$$

o bien

$$\int_{V_x} \left[ \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] d\Omega_x = 0 \quad (A.12c)$$

Obsérvese que los dos primeros términos son la derivada material de  $\rho$ , si se aplica la Ec. (13), la ecuación anterior queda

$$\int_{V_x} \left[ \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\chi} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] d\Omega_x = 0 \quad (A.12d)$$

y puesto que  $V_x$  es arbitrario

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\chi} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } R_x \quad (A.13)$$

## A.2 Conservación de momentum (ecuación de equilibrio)

Utilizando las mismas definiciones que en la conservación de masa, el principio de conservación de momentum proclama que la velocidad de crecimiento *total* de la cantidad de movimiento de un medio que en el instante  $t$  ocupa el volumen referencial  $V_\chi$ ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_{V_\chi} \hat{\rho}(\chi, t) \mathbf{v}(\chi, t) d\Omega_\chi, \quad (A.14a)$$

es igual a la fuerza neta que se ejerce sobre él

$$\oint_{\partial V_\chi} \hat{\mathbf{t}} dS_\chi + \int_{V_\chi} \hat{\rho} \mathbf{g} d\Omega_\chi, \quad (A.14b)$$

donde  $\hat{\mathbf{t}}$  es la fuerza por unidad de área que actúa sobre la superficie  $\partial V_\chi$  del volumen  $V_\chi$ , y  $\mathbf{g}$  es la fuerza volumétrica por unidad de masa que actúa en  $V_\chi$ . La fuerza sobre la superficie espacial deformada por unidad de



area referencial,  $\hat{\mathbf{t}}$ , se puede escribir como una función del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\hat{\mathbf{T}}$ , y de la normal unitaria exterior,  $\hat{\mathbf{n}}$ , a la superficie referencial

$$\hat{t}_i = \hat{T}_{ij} \hat{n}_j \quad . \quad (A.15)$$

Hay que observar que el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se define aquí en el sentido referencial, i.e. se define con respecto al dominio referencial fijo. El tensor  $\hat{\mathbf{T}}$  está relacionado con el tensor de tensiones de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ , y con el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en su sentido clásico,  $\mathbf{T}^0$  (i.e. definido con respecto a la superficie material en el instante  $t_0$ ), porque todos ellos dan la misma fuerza sobre la superficie deformada,  $dS_x$ , pero utilizan diferentes normales unitarias exteriores y diferentes unidades de area, es decir

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{T}}) dS_\chi = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dS_x = (\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{T}^0) dS_X \quad (A.16a)$$

o bien (ver Malvern, 1965)

$$T_{ij}^0 = J \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} \quad (A.16b)$$

$$\hat{T}_{ij} = \hat{J} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} \quad (A.16c)$$

donde  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}^0$  son las normales unitarias exteriores de la superficie espacial deformada,  $dS_x$ , y de la superficie material en el instante  $t_0$ ,  $dS_X$ , respectivamente.

Substituyendo la Ec. (A.15) en la Ec. (A.14) y utilizando el teorema de la divergencia para transformar integrales de superficie en integrales de volumen, se obtiene

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_{V_\chi} \hat{\rho} v_i d\Omega_\chi = \int_{V_\chi} \left[ \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \chi_j} + \hat{\rho} g_i \right] d\Omega_\chi \quad ; \quad (A.17)$$

el lado izquierdo de la ecuación anterior se transforma aplicando el teorema del transporte de Reynolds y el de la divergencia,

$$\int_{V_\chi} \left[ \left. \frac{\partial \hat{\rho} v_i}{\partial t} \right|_{\chi} + \frac{\partial w_j \hat{\rho} v_i}{\partial \chi_j} \right] d\Omega_\chi = \int_{V_\chi} \left[ \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \chi_j} + \hat{\rho} g_i \right] d\Omega_\chi \quad , \quad (A.18)$$

que a su vez se puede simplificar a

$$\left. \frac{\partial \hat{\rho} v_i}{\partial t} \right|_{\chi} + \frac{\partial w_j \hat{\rho} v_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \chi_j} + \hat{\rho} g_i \quad \text{en } R_\chi \quad (A.19)$$

después de observar que  $V_\chi$  es arbitrario. La Ec. (A.19) se puede simplificar más si se utiliza la ecuación de continuidad, i.e. Ec. (A.7); por lo tanto, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma referencial puede expresarse como

$$\hat{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\chi} + \hat{\rho} w_j \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \chi_j} + \hat{\rho} g_i \quad \text{en } R_\chi \quad . \quad (A.20)$$

La particularización de la ecuación precedente a las descripciones Lagrangiana y Euleriana es automática si se emplean las substitutiones correspondientes, i.e. Ecs. (A.8) y (A.10). En Lagrangianas se obtiene,

$$\rho^0 \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial T_{ji}^0}{\partial X_j} + \rho^0 g_i \quad \text{en } R_X \quad (A.21)$$

puesto que  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^0$ . En cambio, en Eulerianas dado que  $\hat{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma}$ ,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{en } R_x \quad . \quad (A.22)$$

Estas dos últimas ecuaciones se pueden encontrar en Malvern (1965).

La formulación empleada por Hughes et al. (1981) se deduce rápidamente, de la Ec. (A.16a), al observar que

$$\int_{V_\chi} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{T}} dS_\chi = \int_{V_x} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS_x \quad (A.23a)$$

y que

$$d\Omega_x = \hat{J} d\Omega_\chi \quad (A.23b)$$

Por lo tanto, la Ec. (A.18) se reescribe

$$\int_{V_x} \hat{J}^{-1} \left[ \frac{\partial \hat{\rho} v_i}{\partial t} \Big|_{\chi} + \frac{\partial w_j \hat{\rho} v_i}{\partial \chi_j} \right] d\Omega_x = \int_{V_x} \left[ \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \hat{\rho} g_i \hat{J}^{-1} \right] d\Omega_x \quad (A.24)$$

En la ecuación anterior, la integral desaparece puesto que  $V_x$  es arbitrario; además, el lado derecho de la Ec. (A.24) se simplifica aplicando la ecuación de continuidad, i.e. la Ec. (A.7), y la densidad referencial,  $\hat{\rho}$ , desaparece al sustituir la Ec. (A.2a); por lo tanto,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\chi} + w_j \rho \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{en } R_x \quad . \quad (A.25)$$

Aplicando la regla de la cadena y la Ec. (13) y recordando que  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico, se deduce finalmente

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\chi} + c_j \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{en } R_x \quad . \quad (A.26)$$

## APENDICE B: DEFINICIÓN DE MATRICES Y VECTORES

En este apéndice se desarrollan las matrices necesarias para resolver las ecuaciones de continuidad, equilibrio y actualización de la malla. Las sumas sobre los elementos simbolizan el ensamblaje de las contribuciones de cada elemento;  $N_a$ ,  $\hat{N}_a$ , y  $N_a^P$  son las funciones de forma, continuas, del elemento para velocidad, velocidad de la malla, y presión, respectivamente, en el nodo "a"; y  $\bar{k}$  es la difusividad artificial. La ecuación de continuidad es

$$\mathbf{M}^P \dot{\mathbf{P}} + \boldsymbol{\eta}^P(\mathbf{P}) + \mathbf{G}^T \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (B.1)$$

donde

$$\mathbf{M}^P = \sum_e \mathbf{M}^{Pe} \quad , \quad \mathbf{M}^{Pe} = [M_{IJ}^P] \quad (B.2a)$$

$$M_{IJ}^P = \int_{R_x^e} \frac{1}{B} N_a^P N_b^P dR_x \quad (B.2b)$$

$$\boldsymbol{\eta}^P(\mathbf{P}) = \sum_e \boldsymbol{\eta}^{Pe} \quad , \quad \boldsymbol{\eta}^{Pe} = [\eta_I^P] \quad (B.3a)$$

$$\eta_I^P = \int_{R_x^e} \frac{1}{B} N_a^P c_k \frac{\partial P}{\partial x_k} dR_x \quad (B.3b)$$

$$\mathbf{G} = \sum_e \mathbf{G}^e \quad , \quad \mathbf{G}^e = [G_{MJ}] \quad (B.4a)$$

$$G_{MJ} = \int_{R_x^e} N_b^P \frac{\partial N_c}{\partial x_m} dR_x \quad (B.4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = (a - 1) \text{ NEPN} \\ J = (b - 1) \text{ NEPN} \\ M = (c - 1) \text{ NEN} + m \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq a, b \leq \text{NEPN} \\ 1 \leq c \leq \text{NEN} \\ 1 \leq m \leq \text{NSD} \end{array} \right. \quad (B.5)$$

donde NEPN, NEN y NSD son el número de nodos de presión por elemento, el número de nodos de velocidad (o desplazamiento) por elemento y el número de direcciones espaciales, respectivamente.

La ecuación de equilibrio se escribe como

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}) + \mathbf{K}_\mu \mathbf{v} - \mathbf{G} \mathbf{P} = \mathbf{f}^{ext} \quad (B.6)$$

donde

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{M}^e = [M_{IJ}] \quad (B.7a)$$

$$M_{IJ} = \int_{R_x^e} \delta_{ij} \left( N_a + \frac{\partial N_a}{\partial x_n} \bar{k} \frac{c_n}{\|\mathbf{c}\|^2} \right) \rho N_b dR_x \quad (B.7b)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}) = \sum_e \boldsymbol{\eta}^e, \quad \boldsymbol{\eta}^e = [\eta_I] \quad (B.8a)$$

$$\eta_I = \int_{R_x^e} \rho \left( N_a + \frac{\partial N_a}{\partial x_n} \bar{k} \frac{c_n}{\|\mathbf{c}\|^2} \right) c_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} dR_x \quad (B.8b)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \sum_e \mathbf{f}^{ext\ e}, \quad \mathbf{f}^{ext\ e} = [f_I^{ext}] \quad (B.9a)$$

$$f_I^{ext} = \int_{R_x^e} \rho \left( N_a + \frac{\partial N_a}{\partial x_n} \bar{k} \frac{c_n}{\|\mathbf{c}\|^2} \right) g_i dR_x \quad (B.9b)$$

$$\begin{cases} I = (a-1) \text{ NEN} + i \\ J = (b-1) \text{ NEN} + j \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 1 \leq i, j, m, n \leq \text{NSD} \\ 1 \leq a, b \leq \text{NEN} \end{cases} \quad (B.10)$$

$$\mathbf{K}_\mu = \sum_e \mathbf{K}_\mu^e, \quad \mathbf{K}_\mu^e = \int_{R_x^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dR_x \quad (B.11a)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_a \cdots \mathbf{B}_{\text{NEN}}] \quad (B.11b)$$

$$\mathbf{B}_a^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (B.11c)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (B.11d)$$



Y finalmente, la ecuación de actualización de la malla es

$$\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{M}} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (B.12)$$

donde

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_e \hat{\mathbf{M}}^e, \quad \hat{\mathbf{M}}^e = [\hat{M}_{IJ}] \quad (B.13a)$$

$$\hat{M}_{IJ} = \int_{R_\chi^e} \delta_{ij} \left( \hat{N}_a + \frac{\partial \hat{N}_a}{\partial \chi_n} \bar{k} \frac{\hat{c}_n}{\|\hat{\mathbf{c}}\|^2} \right) \hat{N}_b dR_\chi \quad (B.13b)$$

verificandose las ecuaciones (B.10). El término convectivo se define de la siguiente manera

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) = \sum_e \hat{\boldsymbol{\eta}}^e, \quad \hat{\boldsymbol{\eta}}^e = [\hat{\eta}_I] \quad (B.14a)$$

$$\hat{\eta}_I = \int_{R_\chi^e} \delta_{ij} \left( \hat{N}_a + \frac{\partial \hat{N}_a}{\partial \chi_n} \bar{k} \frac{\hat{c}_n}{\|\hat{\mathbf{c}}\|^2} \right) \hat{c}_m \frac{\partial x_i}{\partial \chi_m} dR_\chi \quad (B.14b)$$

donde resta por determinar, para cada método de remallado, el vector de convección,  $\hat{\mathbf{c}}$ .

(i) Método de la matriz de Euler-Lagrange

Es evidente observando la Ec. (30) que la convección que aparece en la ecuación de movimiento de la malla para este método es

$$\hat{c}_i = (\delta_{ij} - \alpha_{ij}) v_j \quad (B.15)$$

(ii) Formulación mixta

Sin pérdida de generalidad se asume que la superficie libre es perpendicular a la dirección de  $\chi_3$ . Los cofactores citados en las secciones anteriores son, en este caso,

$$\hat{j}^{33} = \frac{\partial x_1}{\partial \chi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \chi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \chi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \chi_1} \quad (B.16a)$$

$$\hat{j}^{13} = \frac{\partial x_2}{\partial \chi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \chi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \chi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \chi_1} \quad (B.16b)$$

$$\hat{j}^{23} = \frac{\partial x_1}{\partial \chi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \chi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \chi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \chi_2} \quad (B.16c)$$

Recuerdese que  $x_3$  es la única incógnita que define la superficie libre que se supone material (i.e.  $w_3 = 0$ ). Substituyendo las Ecs. (B.16) en la Ec. (37)

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial t} \Big|_{\chi} + \left\{ \left[ (v_1 - \hat{v}_1) \frac{\partial x_2}{\partial \chi_2} - (v_2 - \hat{v}_2) \frac{\partial x_1}{\partial \chi_2} \right] / \hat{j}^{33} \right\} \frac{\partial x_3}{\partial \chi_1} + \\ \left\{ \left[ -(v_1 - \hat{v}_1) \frac{\partial x_2}{\partial \chi_1} + (v_2 - \hat{v}_2) \frac{\partial x_1}{\partial \chi_1} \right] / \hat{j}^{33} \right\} \frac{\partial x_3}{\partial \chi_2} = 0 \end{aligned} \quad (B.17)$$

y se define el vector convectivo como

$$\hat{c}_1 = \left[ (v_1 - \hat{v}_1) \frac{\partial x_2}{\partial \chi_2} - (v_2 - \hat{v}_2) \frac{\partial x_1}{\partial \chi_2} \right] / \hat{j}^{33} \quad (B.18a)$$

$$\hat{c}_2 = \left[ -(v_1 - \hat{v}_1) \frac{\partial x_2}{\partial \chi_1} + (v_2 - \hat{v}_2) \frac{\partial x_1}{\partial \chi_1} \right] / \hat{j}^{33} \quad (B.18b)$$

$$\hat{c}_3 = 0 \quad (B.18c)$$

## APENDICE C: MÉTODO DE LA MATRIZ DE EULER-LAGRANGE SEGÚN UNA FORMULACIÓN DE GALERKIN

La ecuación de actualización de la malla por el método de la matriz de Euler-Lagrange utilizando una formulación de Galerkin es, como ya se ha visto,

$$\hat{M} \hat{v} + \hat{\eta}(\mathbf{x}) - \hat{M} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (C.1)$$

De igual forma que Hughes et al. (1981), la integración sobre el dominio referencial se efectúa aplicando la cuadratura de Lobatto, para de esta forma, suprimir la “difusión” entre nodos Lagrangianos y Eulerianos. Además, es importante observar que al ser el dominio referencial fijo en el tiempo, la matriz generalizada de masa es constante e igual a

$$\hat{M} = \sum_e \hat{M}^e, \quad \hat{M}^e = [\hat{M}_{IJ}] \quad (C.2a)$$

$$\hat{M}_{IJ} = \int_{R_\chi^e} \delta_{ij} \hat{N}_a \hat{N}_b dR_\chi \quad (C.2b)$$

$$= J_a \omega_a \delta_{ij} \delta_{ab} \quad (C.2c)$$

donde se utiliza la misma notación que en el Apéndice C; y  $J_a$  y  $\omega_a$  son el Jacobiano y el factor de peso, respectivamente, asociados al nodo “a”. El término convectivo de la ecuación (C.1) puede transformarse en un tensor de tercer orden en banda según

$$\hat{\eta}(\mathbf{x}) = (\hat{L} \mathbf{v}) \mathbf{x} \quad (C.3)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \sum_e \hat{\mathbf{L}}^e, \quad \hat{\mathbf{L}}^e = [\hat{L}_{IJK}] \quad (C.4a)$$

$$\hat{L}_{IJK} \hat{v}_K = \int_{R_\chi^e} \delta_{ij} \hat{N}_a (\delta_{mn} - \alpha_{mn}) v_n \frac{\partial \hat{N}_b}{\partial \chi_m} dR_\chi \quad (C.4b)$$

$$= J_a \omega_a \delta_{ij} (\delta_{mn} - \alpha_{mn}(a)) v_n(a) \frac{\partial \hat{N}_b(a)}{\partial \chi_m} \quad (C.4c)$$

donde

$$\begin{cases} I = (a-1) \text{ NEN} + i \\ J = (b-1) \text{ NEN} + j \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 1 \leq i, j, m, n \leq \text{NSD} \\ 1 \leq a, b \leq \text{NEN} \end{cases} ; \quad (C.5)$$

$K$  varia entre uno y el número de variables por elemento; y  $\alpha(a)$ ,  $\hat{N}_b(a)$  y  $\mathbf{v}(a)$  son particularizaciones de la matriz de parámetros de Euler-Lagrange, la función de forma de la malla y la velocidad material, respectivamente, en el nodo "a". Por lo tanto el tensor de tercer orden en banda  $\mathbf{L}$ , constante en el tiempo, se puede definir con las ecuaciones (C.4a) y

$$\hat{L}_{IJK} = J_a \omega_a \delta_{ij} (\delta_{mn} - \alpha_{mn}(a)) \frac{\partial \hat{N}_b(a)}{\partial \chi_m} \quad (C.6)$$

donde

$$\begin{cases} I = (a-1) \text{ NEN} + i \\ J = (b-1) \text{ NEN} + j \\ K = (a-1) \text{ NEN} + n \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 1 \leq i, j, m, n \leq \text{NSD} \\ 1 \leq a, b \leq \text{NEN} \end{cases} . \quad (C.7)$$

Consecuentemente, la ecuación de actualización de la malla, Ec. (C.1), se puede reescribir como

$$\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{v} - (\hat{\mathbf{L}} \mathbf{v}) \mathbf{x} \quad (C.8)$$

y las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\hat{\mathbf{M}}$  se evalúan después de leer los datos del problema, se guardan y se utilizan en cada paso del cálculo.